

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

JACQUES HUETZ

LICENCIÉ ÈS SCIENCES



1^{re} THÈSE

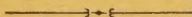
CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DU COEFFICIENT DE VISCOSITÉ DES LIQUIDES

2^e THÈSE

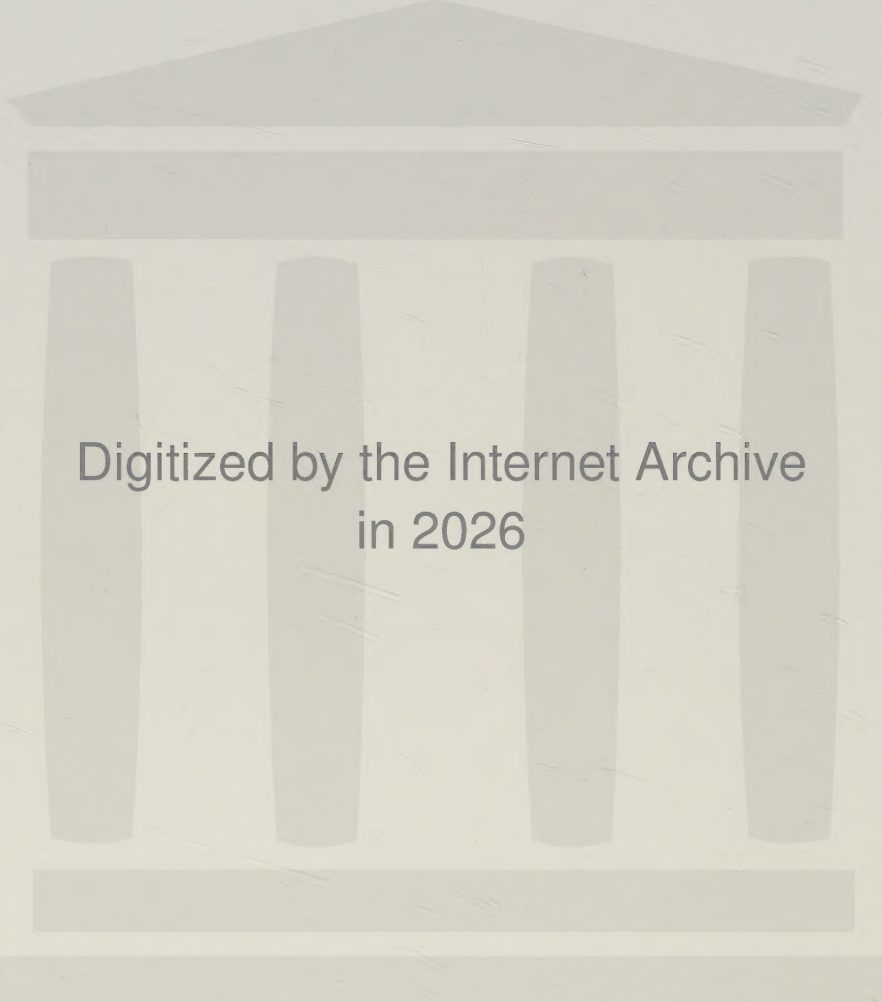
PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

INFLUENCE DE LA STRUCTURE DES HYDROCARBURES SUR LEUR VISCOSITÉ

Soutenues le 17 mars 1950 devant la Commission d'Examen



<i>Jury.</i> {	MM. H. VILLAT	<i>Président.</i>
	J. CABANNES	{ <i>Examineurs.</i>
	E. DARMOIS	
	R. THIRY	



Digitized by the Internet Archive
in 2026

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

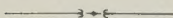
POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

JACQUES HUETZ

LICENCIÉ ÈS SCIENCES



1^{re} THÈSE

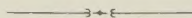
CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DU COEFFICIENT DE VISCOSITÉ DES LIQUIDES

2^e THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

INFLUENCE DE LA STRUCTURE DES HYDROCARBURES SUR LEUR VISCOSITÉ

Soutenues le 17 mars 1950 devant la Commission d'Examen



<i>Jury</i> {	MM. H. VILLAT	{	<i>Président.</i>
	J. CABANNES		<i>Examineurs.</i>
	E. DARMOIS		
	R. THIRY		

THESES

UNIVERSITY OF LEIDEN

IN THE FACULTY OF LETTERS
AND IN THE FACULTY OF SCIENCES

OF LEIDEN

PRESENTED FOR THE DEGREE OF DOCTOR

BY

STANLEY J. HARRIS

OF THE CITY OF NEW YORK



1924

PRINTED BY J. M. H. DE VRIES

LEIDEN: J. M. H. DE VRIES, 1924

ALL RIGHTS RESERVED

LEIDEN: J. M. H. DE VRIES

1924

1924

1924

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

1934

PHYSIQUE

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE

DU COEFFICIENT DE VISCOSITÉ DES LIQUIDES

PAR
M. J. G. G. G.
1934

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Doyen M. A. CHATELET

PROFESSEURS

G. JULIA	T	Analyse supérieure et algèbre supérieure.	H. CARTAN	T	Mathématiques générales.
A. DENJOY	T	Théorie des fonctions.	SCHAEFFER	T	Physiologie des fonctions.
L. LUTAUD	T	Géographie physique et géologie dynamique.	LAFFITTE	T	Chimie (P.C.B.).
E. DARMOIS	T	Enseignement de physique.	FAVARD		Calcul des probabilités et physique-mathématique.
Robert LÉVY	T	Physiologie comparée.	COULOMB	T	Physique du globe.
Henri VILLAT	T	Mécanique des fluides et applications.	M ^{lle} COUSIN	T	Biologie animale (P.C.B.).
Ch. JACOB	T	Géologie.	CHRÉTIEN		Chimie (P.C.B.).
P. PASCAL	T	Chimie générale.	P. DRACH		Zoologie.
M ^{me} RAMART-LUCAS	T	Chimie organique.	KASTLER		Physique.
FOCH	T	Mécanique physique et expérimentale.	CHATELET	T	Arithmétique et théorie des nombres.
PAUTHENIER	T	Électrotechnique générale.	EPHRUSSI	T	Génétique.
DE BROGLIE	T	Théories physiques.	WURMSER	T	Biologie physico-chimique.
JOB	T	Chimie générale.	BAUER	T	Chimie-physique.
PRENANT	T	Anatomie et histologie comparées.	RIVIÈRE		Géologie (P.C.B.).
COMBES	T	Physiologie végétale.	GAUTHERET		Biologie végétale (P.C.B.).
GARNIER	T	Géométrie supérieure.	LUCAS		Physique.
PÉRÈS	T	Mécanique rationnelle.	A. THOMAS		Évolution des êtres organisés.
HACKSPILL	T	Chimie minérale.	ARNULF		Optique appliquée.
LAUGIER	T	Physiologie générale.	MAX MORAND		Physique.
TOUSSAINT	T	Technique aéronautique.	SOLEILLET		Physique.
M. CURIE	T	Physique (P.C.B.).	FORTIER	T	Mécanique expérimentale des fluides.
G. RIBAUD	T	Hautes températures.	DANJON	T	Astronomie.
CHAZY	T	Mécanique analytique et mécanique céleste.	FROMAGEOT	T	Chimie biologique.
CROZE	T	Physique théorique et physique céleste.	LAPORTE	T	Physique générale et radio-activité.
DUPONT	T	Théories chimiques.	JANET		Mathématiques générales.
VALIRON	T	Calcul différentiel et calcul intégral.	PETIT	T	Biologie maritime.
BARRABÉ	T	Géologie structurale et géologie appliquée.	QUENEY	T	Météorologie et dynamique atmosphérique.
VAVON	T	Analyse et mesures chimiques.	GALLIEN		Biologie animale (P.C.B.).
G. DARMOIS	T	Calcul des probabilités et physique mathématique.	EICHORN		Biologie végétale (P.C.B.).
Jacques BOURCART	T	Géographie physique et géologie dynamique.	DE CUGNAC		Biologie végétale (P.C.B.).
AUBEL	T	Chimie biologique.	LAVAL		Physique (P.C.B.).
M ^{me} JOLIO-CURIE	T	Physique générale et radio-activité.	M ^{lle} CAUCHOIS		Chimie-physique.
PLANTEFOL	T	Botanique.	THELLIER		Physique du globe.
CABANNES	T	Recherches physiques.	AUDUBERT		Électrochimie.
GRASSÉ	T	Évolution des êtres organisés.	L'HÉRITIER		Génétique.
PRÉVOST	T	Chimie organique.	GRIVET	T	Radio-électricité.
BOULIGAND	T	Application de l'analyse à la géométrie.	PONCIN		Mécanique des fluides.
CHAUDRON	T	Chimie appliquée.	THIRY	T	Mécanique appliquée.
WYART	T	Minéralogie.	DUBREIL		Mathématiques générales.
TEISSIER	T	Zoologie.	QUELET		Chimie (P.C.B.).
MANGENOT	T	Biologie végétale.	CAGNIARD		Géophysique appliquée.
P. AUGER	T	Physique quantique et relativité.	CHAMPETIER		Chimie appliquée.
MONNIER		Physiologie générale.	CUVILLIER		Géologie structurale et géologie appliquée.
PIVETEAU	T	Géologie.	JUNG		Pétrographie.
ROCARD	T	Physique.	TRILLAT		Physique (P.C.B.).
			WIEMANN		Chimie (P.C.B.).
			LICHNEROWICZ		Mathématiques.
			JACQUINOT		Physique (P.C.B.).
			VASSY		Physique de l'atmosphère.
			DESTOUCHES		Théories physiques.

Secrétaire Ch. MONIER

A Monsieur M. AUBERT,
Maître de Conférences honoraire
à la Faculté des Sciences de Paris

*L'expression de ma plus profonde
reconnaissance*

TABLE DES MATIÈRES

	PAGES
INTRODUCTION	1
A. Rappel des méthodes de mesure du coefficient de viscosité	1
B. Travaux antérieurs sur les systèmes centrés	2
C. Présentation du travail	3
PREMIÈRE PARTIE	
SYSTÈMES CENTRÉS : ÉTUDE DES FORCES TANGENTIELLES	
CHAPITRE PREMIER	
Rappel des notions élémentaires théoriques	5
A. Équations générales en coordonnées cartésiennes	5
B. Équations dans le système de coordonnées cylindriques z, r, θ	6
C. Calcul du couple élémentaire	8
CHAPITRE II	
Essai d'explication et de prévision théorique des faits expérimentaux	10
A. Exposé des faits	10
B. Impossibilité du mouvement plan dans certains cas	11
CHAPITRE III	
Description des appareils et caractéristiques des huiles employées	16
A. Les appareils	16
1. Rotation de la sphère intérieure	16
2. Mesure des très faibles moments	17
3. Rotation de la sphère extérieure	17
4. Correction de température	17
B. Caractéristiques des huiles employées	20
C. Application au couple exercé sur des corps de révolution concentriques ...	21
CHAPITRE IV	
Mesure expérimentale du moment M pour des sphères	22
A. Détermination de la formule donnant le couple pour des sphères concentriques	22
B. Exposé des expériences	22
1. Huiles de viscosité supérieure à 3 poises	22
II. Huiles de viscosité inférieure à 3 poises	24

CHAPITRE V		PAGES
Calcul et mesure du couple pour des ellipsoïdes de révolution. — Cas du cylindre de révolution		28
A. Calcul du moment exercé par un fluide visqueux indéfini sur un ellipsoïde de révolution		28
B. Résultats expérimentaux		31

CHAPITRE VI		
Visualisation des lignes de courant		34
1. Généralités		34
2. Description de l'appareillage et des expériences		35
3. Résultats expérimentaux		36
4. Conclusion		40

CHAPITRE VII		
Interprétation générale des résultats		41
I. Incompatibilité des équations de Stokes et du mouvement gauche avec la continuité des vitesses		42
II. Discontinuité des vitesses		44
III. Examen des résultats expérimentaux		46
CONCLUSION		47

DEUXIÈME PARTIE

COIN D'HUILE : ÉTUDE DES PRESSIONS

INTRODUCTION	49
I. Rappel de la théorie de Reynolds et critique des hypothèses qu'elle implique	50
II. Principe de l'appareil et extension de la théorie de Reynolds	53
III. Mesures expérimentales	64
CONCLUSION	66
BIBLIOGRAPHIE	70

INTRODUCTION

A. Rappel des méthodes de mesure du coefficient de viscosité.

Plusieurs méthodes de mesure du coefficient de viscosité η des liquides sont actuellement utilisées; rappelons que la théorie de Navier permet de connaître les efforts exercés par un fluide visqueux sur un volume élémentaire $d\tau$, en déplacement relatif; cependant cette théorie donne des équations qui ne sont intégrées que dans un nombre de cas restreints dont nous signalerons les trois principaux :

- 1° Écoulement dans un tube cylindrique indéfini;
- 2° Forces exercées sur des corps de révolution coaxiaux en mouvement relatif, le fluide remplissant l'espace interstitiel;
- 3° Résistance à l'avancement, créée par un fluide visqueux indéfini, sur une sphère en translation uniforme.

Ce sont du reste les trois méthodes appliquées à la mesure des coefficients de viscosité η . Or on n'en utilise pratiquement que deux dans les laboratoires de viscosimétrie; elles donnent naissance : soit aux viscosimètres à écoulement, type Baume-Vigneron, soit aux appareils utilisant la translation d'une sphère dans un milieu fini, ceci lorsque la viscosité devient très grande (de l'ordre de celle des asphaltes ou des goudrons), ou bien lorsque des circonstances particulières rendent malaisé l'emploi de tubes (mesures de η sous fortes pressions, par exemple); dans ce cas, c'est la formule de Stokes qui donne la valeur de la résistance :

$$\mathcal{R} = 6 \eta \pi UR$$

U étant la vitesse de chute en mouvement uniforme.

R étant le rayon de la sphère.

Alors que les deux méthodes employées obligent à des corrections incertaines pour tenir compte de la limitation des tubes ou des enceintes où sont enfermés liquides et corps en translation, la méthode des solides tournants peut être réalisée en conformité avec la théorie traduite par les équations de Navier linéarisées, ou équations de Stokes. En effet ces équations ne supposent expressément qu'une chose : la force centrifuge peut être négligée; or celle-ci introduit des termes proportionnels aux carrés de la vitesse angulaire. Nous nous limiterons donc aux vitesses pour lesquelles les courbes exprimant la relation : forces extérieures en fonction des vitesses angulaires, sont des droites, aux erreurs d'expérience près.

De plus ces deux méthodes ne tiennent pas compte de notions nouvellement introduites : l'influence de l'onctuosité doit se faire sentir sur la paroi solide au contact du film d'huile

et peut influencer sur la précision des mesures; d'autre part les phénomènes d'orientation moléculaire en facilitant les glissements diminuent le η mesuré. Des expériences de MARCELIN montrent qu'une bille roulant sur un plan incliné submergé d'huile ne tombe pas à la même vitesse à son premier et à son deuxième passage (1). L'orientation moléculaire se produit également chaque fois que la lame d'huile est soumise à de forts gradients de vitesse. AUBERT et PIGNOT, entre autres, ont montré cet effet sur une lame comprise entre deux cylindres coaxiaux, de rayons voisins, animés de vitesse relative de l'ordre de 3 000 tours-minute (2).

En bref, il nous a paru intéressant d'essayer, par la mesure du couple exercé sur deux corps de révolution concentriques, d'instaurer une mesure véritablement absolue de η , puisque c'est, parmi les trois méthodes signalées, la seule qui permette un dispositif expérimental rigoureusement conforme à la théorie. Par ailleurs on éliminera, autant que possible, l'influence de l'orientation moléculaire en obtenant de faibles gradients de vitesse dans la lame. D'autre part, vu le rapport des surfaces solides en contact avec un volume d'huile déterminé, l'importance du phénomène d'onctuosité sera nettement diminuée par rapport à la méthode des tubes. Enfin nous tenterons d'établir par comparaison avec les autres méthodes, les domaines de vitesse et de viscosité où son emploi est préférable, et ceux où elle donne lieu à des anomalies dont nous chercherons l'explication.

B. Travaux antérieurs sur les systèmes centrés.

Deux cas particulièrement intéressants se présentent dans l'étude du frottement de liquides sur des corps en rotation :

- 1° Oscillations de corps;
- 2° Rotation uniforme dans un même sens.

Le premier cas a été étudié par COULOMB, par MAXWELL, par KARMANN, en particulier (3).

Nous ne nous occuperons ici que de la rotation uniforme dont un cas particulièrement intéressant a été expérimenté par COUETTE, LEWIS, MOLIN, MALLOCK, SCHEDOFF, etc. Ces auteurs ont utilisé les forces extérieures sur des corps de révolution en rotation uniforme, et ont très souvent choisi, pour des raisons de commodité expérimentale, des cylindres de révolution. Or, les réalisations expérimentales ne peuvent se contenter que de cylindres tronqués aux deux bouts; le cylindre infini, seul, est analytique; son cas peut, seul, être traité mathématiquement. Les auteurs précités ont donc été obligés d'employer des corrections douteuses pour tenir compte de l'effet des bouts, ou des ingéniosités expérimentales, comme les anneaux de garde de COUETTE. Leur dispositif expérimental était tel que l'espace interstitiel entre les deux cylindres était toujours très faible de l'ordre de 2 mm chez COUETTE pour un diamètre de cylindre de l'ordre de 14 cm (4).

En 1935, A. GUILLET, rompant avec ces traditions, mesura le moment des forces exercées sur deux sphères concentriques, séparées par le fluide visqueux (5). Il trouva dans les conditions où il se plaçait, un coefficient de viscosité en excès de 30 à 40 p. 100 sur η donné par les tubes, le couple étant toujours proportionnel à η et à ω_0 , vitesse angulaire relative des deux sphères.

En 1931, A. FOCH et BARIOL avaient déjà trouvé des viscosités trop élevées en employant la méthode des corps oscillants dans le fluide, le couple étant toujours proportionnel à la vitesse angulaire et à η . Ces anomalies ne pouvaient plus être mises sur le compte des difficultés et de l'imprécision des mesures, les erreurs d'expérience se montant ici à quelque 3 p. 100 (6).

C. Présentation du travail.

Ce sont des expériences identiques à celles de A. GUILLET qui ont été reprises et étendues à de nombreuses huiles d'une part et à d'autres corps de révolution d'autre part : ellipsoïde de révolution ovoïde et planétaire, par exemple, et disque circulaire plan, comme cas particulier. Nous avons fait également varier l'espace entre le corps de révolution et son enveloppe dans de larges limites.

Dans toutes les expériences, nous nous sommes attachés à rester dans un domaine où la force centrifuge reste négligeable. Bien que l'existence d'un régime tourbillonnaire au sens de REYNOLDS eût dû se traduire par des termes proportionnels au carré de la vitesse, nous nous sommes efforcés de mettre en évidence la forme des lignes de courants, supposées circulaires planes dans la théorie, en les matérialisant et en étudiant la cinématique du phénomène. L'ensemble de ce travail fait l'objet de la première partie.

Au lieu de mesurer par l'intermédiaire des couples les forces tangentielles exercées par les fluides visqueux, l'on peut aussi se proposer de mesurer les efforts normaux par l'intermédiaire de mesures des pressions. La prévision théorique des pressions développées au sein d'une lame d'huile comprise entre deux surfaces, en mouvement relatif de vitesse u_0 , a été commencée en 1886 par O'REYNOLDS. Ces forces, si l'on peut admettre se trouver dans le domaine où les équations de NAVIER linéarisées restent applicables, sont donc linéaires en η et permettent de le déterminer.

Nous nous sommes attachés dans la deuxième partie de ce travail à mettre au point un viscosimètre à coin d'huile, qui nous a permis, par ailleurs, de soumettre au contrôle expérimental les hypothèses formulées par O'REYNOLDS et ses successeurs, hypothèses qui sont à la base des calculs sur le graissage des arbres et des paliers (7).

Remarque.

Avant de rappeler quelques notions théoriques de viscosité, nous croyons utile de faire nettement la distinction entre le régime dit « laminaire » et ce qu'on appelle « régime tourbillonnaire ». Dans le premier, nous classerons tous les mouvements fluides qui se font avec champ de vitesse, autrement dit, la particule qui passe en un point donné a une vitesse bien déterminée en grandeur et direction. Rentrent donc dans cette catégorie les mouvements permanents; nous pourrions y observer des anneaux, etc. Dans l'autre, le régime tourbillonnaire, au sens habituel d'après REYNOLDS, la connaissance de la vitesse d'une particule qui passe en un endroit ne fait pas connaître la vitesse de celle qui y passera l'instant d'après.

Les équations de la viscosité ne s'appliquent qu'à condition de rester dans le régime dit

laminaire. Les considérations de REYNOLDS fixent vaguement le passage de l'un à l'autre : lorsque le nombre $N = \frac{VD}{\nu}$, où V est la vitesse, D une constante de l'appareil où se produit l'écoulement et ν la viscosité cinématique ($\nu = \frac{\eta}{\rho}$) est inférieur à 1800, on a le régime laminaire.

Dans toutes les expériences qui suivront, nous resterons toujours dans des conditions telles que l'on ait le régime laminaire ainsi défini.

PREMIÈRE PARTIE

SYSTÈMES CENTRÉS ÉTUDE DES FORCES TANGENTIELLES

CHAPITRE PREMIER

RAPPEL DES NOTIONS ÉLÉMENTAIRES THÉORIQUES

A. Équations générales en coordonnées cartésiennes.

Les équations qui régissent les mouvements laminaires de fluides visqueux sont les équations de NAVIER qui s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \left[X - \frac{du}{dt} \right] - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \Delta u = 0 \\ \rho \left[Y - \frac{dv}{dt} \right] - \frac{\partial p}{\partial y} + \eta \Delta v = 0 \\ \rho \left[Z - \frac{dw}{dt} \right] - \frac{\partial p}{\partial z} + \eta \Delta w = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

Où u, v, w , sont les vitesses dans le système de coordonnées d'EULER;

p , est la pression;

ρ , la masse spécifique du liquide envisagé;

X, Y, Z , sont les projections des forces extérieures.

Supposant le régime permanent et comme champ de force la seule force de la pesanteur, elles deviennent :

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial x} - \eta \Delta u + \rho \left[u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right] &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial y} - \eta \Delta v + \rho \left[u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right] &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} - \eta \Delta w + \rho \left[u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right] &= \rho Z.\end{aligned}\tag{II}$$

Ce sont les équations de NAVIER les plus générales. Nous pouvons avec STOKES négliger les termes d'inertie quand les vitesses sont suffisamment faibles. Nous aurons ainsi le système de STOKES, ou équations de NAVIER linéarisées, auquel nous adjoindrons l'équation de continuité, en supposant, dans le cas qui nous préoccupe, que les fluides sont incompressibles :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} - \eta \Delta u = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial y} - \eta \Delta v = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} - \eta \Delta w = \rho Z \\ \operatorname{div} \vec{V} = 0. \end{cases}\tag{III}$$

C'est le système que nous emploierons désormais, sauf spécification contraire.

En dérivant les équations du système I par rapport à x, y, z , respectivement et en ajoutant, on obtient :

$$\Delta p = 0.$$

En appliquant par ailleurs l'opérateur de LAPLACE aux équations de III, il vient :

$$\Delta \Delta u = \Delta \Delta v = \Delta \Delta w = 0.$$

Donc, compte tenu des hypothèses que nous avons faites et que nous rappelons : régime permanent, fluide incompressible, champ de force, celui de la pesanteur, termes d'inertie négligeables, nous voyons sous cette forme que le champ de vitesse doit être indépendant du coefficient de viscosité du liquide employé.

B. Équations dans le système de coordonnées cylindriques z, r, θ .

Le calcul est classique (voir, par exemple, BOUASSE, *loc. cit.* p. 216). Si nous nous limitons au cas des équations linéarisées appliquées à des corps de révolution d'axe Oz qui est éga-

lement l'axe de rotation et, si nous supposons le mouvement plan circulaire de vitesse ω et la pression constante dans un plan parallèle à xOy , les équations de STOKES, en régime permanent ou non, sont donc :

$$\begin{cases} \eta \Delta u = \rho \frac{\partial u}{\partial t} \\ \eta \Delta v = \rho \frac{\partial v}{\partial t} \end{cases} \quad (IV)$$

dans le système de coordonnées cartésiennes.

Supposons l'existence d'une fonction de courant ψ . En vertu de nos hypothèses, on a :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\omega y, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \omega x, \quad \omega = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

soit, en utilisant comme variables $r^2 = x^2 + y^2$ et z :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{y}{r}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{x}{r}.$$

Substituant dans les équations de Navier réduites (IV) :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

il vient :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\eta \Delta \psi - \rho \frac{\partial \psi}{\partial t} \right] = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[\eta \Delta \psi - \rho \frac{\partial \psi}{\partial t} \right] = 0.$$

Donc :

$$\eta \Delta \psi - \rho \frac{\partial \psi}{\partial t} = \epsilon(z, t).$$

Ou en remplaçant $\Delta \psi$ par sa valeur, en coordonnées cylindriques :

$$\eta \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right] - \rho \frac{\partial \psi}{\partial t} = \epsilon(z, t).$$

Pour obtenir l'équation à laquelle satisfait la vitesse angulaire, dérivons l'équation précédente par rapport à r et utilisons l'équation $\omega = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}$:

$$\eta \left[-\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \omega) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r^2 \omega) + r \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \right] = \rho r \frac{\partial \omega}{\partial t}.$$

Ou encore :

$$\eta \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \right] = \rho \frac{\partial \omega}{\partial t}.$$

En régime permanent, circulaire, plan, et pour des équations linéarisées, ω sera donc déterminé par :

$$\frac{\partial^3 \omega}{\partial r^3} + \frac{\partial^3 \omega}{\partial z^3} + \frac{3}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} = 0$$

équation fondamentale, également valable pour le système d'équations non linéarisées comme nous le verrons plus loin, et que nous aurons souvent à utiliser.

C. Calcul du couple élémentaire.

Nous supposons avoir à calculer le couple exercé sur un corps de révolution d'axe Oz, support du vecteur rotation $\vec{\omega}$.

D'après les notations de Lamé, les efforts sont :

$$\begin{cases} X = \lambda N_1 + \mu T_3 + \nu T_2 \\ Y = \lambda T_3 + \mu N_2 + \nu T_1 \\ Z = \lambda T_2 + \mu T_1 + \nu N_3 \end{cases} \quad (V)$$

N_1, N_2, N_3 et T_1, T_2, T_3 , sont donnés par :

$$\begin{cases} N_1 = p - 2 \eta \frac{\partial u}{\partial x} \\ N_2 = p - 2 \eta \frac{\partial v}{\partial y} \\ N_3 = p - 2 \eta \frac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} T_1 = -\eta \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ T_2 = -\eta \left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right] \\ T_3 = -\eta \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right] \end{cases} \quad (VI)$$

λ, μ, ν , étant les cosinus directeurs de la normale au petit élément considéré $d\sigma$.

Le moment des forces X, Y, Z, par rapport à Oz sur l'élément de surface $d\sigma$ est :

$$dM = (xY - yX) d\sigma = r T_n d\sigma;$$

où r est la distance à Oz de l'élément de surface $d\sigma$ et T_n , l'effort perpendiculaire au plan méridien.

$$T_n = \frac{x}{r} Y - \frac{y}{r} X$$

Le calcul de T_n , en utilisant les coordonnées cylindriques et les équations classiques de Lamé donnant les efforts $N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3$, aboutit, toutes simplifications et calculs faits à :

$$\frac{T_n}{\eta} = -\sin \gamma r \frac{\partial \omega}{\partial r} - \cos \gamma r \frac{\partial \omega}{\partial z} \quad (VII)$$

Si nous prenons par exemple pour élément de surface $d\sigma$, l'aire de la zone de hauteur dz , on a :

$$d\sigma = 2\pi r ds, \quad s \text{ abscisse curviligne sur la méridienne.}$$

Le moment M est alors :

$$M = 2\pi \int_{P_1}^{P_2} r^2 T_n ds \quad (\text{VIII})$$

l'intégrale étant étendue d'un pôle à l'autre, soit P_1 et P_2 .

Si on remarque que, γ étant l'angle de la normale avec Oz :

$$\begin{aligned} ds \sin \gamma &= dz \\ ds \cos \gamma &= -dr \end{aligned}$$

en remplaçant T_n , tiré de (VII) dans l'équation du moment (VIII), il vient :

$$M = 2\pi\eta \int_{P_1}^{P_2} r^3 \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} dr - \frac{\partial \omega}{\partial r} dz \right). \quad (\text{IX})$$

Telle est pour le moment M , l'expression la plus générale dans les hypothèses faites : mouvement à symétrie axiale d'axe Oz , corps de révolution axe Oz , mouvement permanent. En particulier cette expression reste correcte que le mouvement du fluide soit plan ou non.

CHAPITRE II

ESSAI D'EXPLICATION ET DE PRÉVISION THÉORIQUE DES FAITS EXPÉRIMENTAUX

A. Exposé des faits.

Avant de mesurer expérimentalement les couples de viscosité exercés sur des solides tournants, il nous paraît intéressant de relever les anomalies mises en évidence par des travaux antérieurs.

Nous écarterons d'abord les phénomènes dus à la rigidité des liquides, phénomènes connus depuis les travaux de SCHEDOFF (8). Ils consistent en ce fait qu'un corps tournant dans un fluide visqueux ne revient pas exactement à sa position d'équilibre après déplacement, de telle sorte que, si l'on construit la courbe M , moment mesuré, en fonction de ω , on a l'aspect de la figure 1. C'est en effet des courbes de ce genre que trouve MOLIN, opérant avec des sirops de sucre cuit (9); la courbe ne passe pas par l'origine.

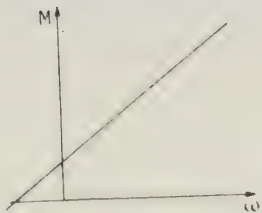


Fig. 1.

En dehors de ces phénomènes, chaque fois que l'on a essayé de relier cette méthode de mesure de η par solides tournants aux autres, on s'est heurté :

a. Soit à des impossibilités de réaliser des expériences en conformité avec les théories : utilisation de cylindres tronqués par exemple. Les auteurs trouvent, dans ce cas, des résultats concordants pour η , quand ils éliminent convenablement l'influence des bouts. Néanmoins, ce ne sont pas des mesures absolues;

b. Soit, dans le cas de mesures qui eussent dû être absolues, à des anomalies flagrantes par rapport aux autres méthodes de mesure de η . Citons le cas typique de deux sphères concentriques de A. GUILLET (5) où le η trouvé présente un excès de 30 à 40 p. 100 sur le η calculé. Citons encore des écarts du même ordre trouvés par FOCU et BARRIOL, au moyen d'oscillations d'un disque plan (6).

Nous allons tout d'abord examiner si les équations de NAVIER ou de STOKES permettent de prévoir et d'expliquer ces phénomènes, ou s'il faut les imputer à une modification réelle de η , par orientation moléculaire ou tout autre phénomène physique.

B. Impossibilité du mouvement plan dans certains cas.

La formule (IX) de la page 9 donnant M ne suppose pas le mouvement plan; mais c'est dans la détermination de la fonction $\omega(z, r)$, nécessaire à l'intégration qui aboutit aux formules employées par GUILLET, pour les sphères, par COUETTE, pour les cylindres etc., que l'on suppose le mouvement plan. Autrement dit, toutes les molécules du liquide, suivant cette hypothèse, se meuvent sur des cercles perpendiculaires à l'axe de rotation. Donc, $w = V_z = 0$.

Montrons d'abord qu'en toute rigueur, en appliquant les équations de NAVIER complètes, un tel mouvement plan est impossible, sauf en un cas.

Soient en effet *les équations de NAVIER complètes* pour lesquelles nous supposons *le mouvement plan permanent*. Il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial x} - \eta \Delta u + \rho \frac{du}{dt} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial y} - \eta \Delta v + \rho \frac{dv}{dt} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \rho \dot{Z} = \rho g \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{array} \right. \quad (1)$$

Nous allons transformer ces équations et passer en coordonnées semi-cylindriques. Remarquons que ce calcul est différent de celui du paragraphe B du chapitre premier, puisque ce dernier s'applique aux *équations linéarisées ou de STOKES*.

Si nous supposons le mouvement giratoire, c'est-à-dire tel qu'il existe une symétrie de révolution pour le champ des vitesses, on a avec les notations classiques :

$$\frac{\partial V_r}{\partial \theta} = \frac{\partial V_n}{\partial \theta} = \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0, \quad V_z = w = 0 \quad (2)$$

V_z, V_r , sont les vitesses dans le plan méridien, $V_n = r\omega$.

Les formules de transformation donnent :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \\ u = V_r \cos \theta - V_n \sin \theta, \quad v = V_r \sin \theta + V_n \cos \theta \end{array} \right. \quad (3)$$

Calculons $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$. C'est un problème classique (voir, par exemple : *Cours de calcul différentiel et intégral* de SERRET, page 116) :

$$du = \frac{\partial u}{\partial r} dr + \frac{\partial u}{\partial \theta} d\theta + \frac{du}{dz} dz$$

avec

$$dr = \frac{xdx + ydy}{r} \quad \text{et} \quad d\theta = \frac{xdy - ydx}{r^2}.$$

D'où en tenant compte de (3) :

$$\begin{aligned} du &= \left[\frac{\partial V_r}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial V_n}{\partial r} \sin \theta \right] \left[\frac{xdx + ydy}{r} \right] \\ &+ [V_r \sin \theta + V_n \cos \theta] \left[\frac{-xdy + ydx}{r^2} \right] + \frac{\partial u}{\partial z} dz. \end{aligned}$$

On aurait de même :

$$\begin{aligned} dv &= \left[\frac{\partial V_r}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial V_n}{\partial r} \cos \theta \right] \left[\frac{xdx + ydy}{r} \right] \\ &+ [-V_r \cos \theta + V_n \sin \theta] \left[\frac{-xdy + ydx}{r^2} \right] + \frac{\partial v}{\partial z} dz. \end{aligned}$$

On tire de là :

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \cos \theta \left[\frac{\partial V_r}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial V_n}{\partial r} \sin \theta \right] + \frac{\sin \theta}{r} [V_r \sin \theta + V_n \cos \theta] \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \sin \theta \left[\frac{\partial V_r}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial V_n}{\partial r} \sin \theta \right] - \frac{\cos \theta}{r} [V_r \sin \theta + V_n \cos \theta] \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial V_r}{\partial z} \cos \theta - \frac{\partial V_n}{\partial z} \sin \theta \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \cos \theta \left[\frac{\partial V_r}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial V_n}{\partial r} \cos \theta \right] + \frac{\sin \theta}{r} [V_n \sin \theta - V_r \cos \theta] \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \sin \theta \left[\frac{\partial V_r}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial V_n}{\partial r} \cos \theta \right] - \frac{\cos \theta}{r} [V_n \sin \theta - V_r \cos \theta] \\ \frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{\partial V_r}{\partial z} \sin \theta + \frac{\partial V_n}{\partial z} \cos \theta \end{aligned} \right.$$

$\frac{\partial u}{\partial z}$ et $\frac{\partial v}{\partial z}$ étant directement tirés des équations (3).

Calculons maintenant les Laplacien des quantités u, v, w , dans le système z, r, θ . Un calcul classique (voir un cours de calcul intégral et différentiel) montre que l'on a :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

On tirera de (3) les valeurs de ces différents termes, ce qui donne enfin :

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta u = \cos \theta \left[\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{V_r}{r^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} \right] \\ \quad - \sin \theta \left[\frac{\partial^2 V_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_n}{\partial r} - \frac{V_n}{r^2} + \frac{\partial^2 V_n}{\partial z^2} \right] \\ \Delta v = \sin \theta \left[\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{V_r}{r^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} \right] \\ \quad + \cos \theta \left[\frac{\partial^2 V_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_n}{\partial r} - \frac{V_n}{r^2} + \frac{\partial^2 V_n}{\partial z^2} \right] \\ \Delta w = 0. \end{array} \right.$$

Une méthode analogue appliquée à $\frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial y}$, $\frac{\partial p}{\partial z}$, nous permettra de passer à $\frac{\partial p}{\partial r}$, $\frac{\partial p}{\partial \theta}$, $\frac{\partial p}{\partial z}$. Indiquons brièvement le calcul :

$$dp = \frac{\partial p}{\partial r} \left[\frac{xdx + ydy}{r} \right] + \frac{\partial p}{\partial \theta} \left[\frac{xdy - ydx}{r^2} \right] + \frac{\partial p}{\partial z} dz$$

D'où :

$$(6) \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial p}{\partial r}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial p}{\partial r},$$

puisque

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer les termes des équations (1) par leurs valeurs tirées de (4), (5), (6), ce qui donne, après simplification des termes en $u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}$ et $u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y}$:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial p}{\partial r} - \eta \left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{V_r}{r^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} \right) + \rho \left(V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{V_r^2}{r} \right) \right] \cos \theta \\ & + \left[\eta \left(\frac{\partial^2 V_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_n}{\partial r} - \frac{V_n}{r^2} + \frac{\partial^2 V_n}{\partial z^2} \right) - \rho \left(V_r \frac{\partial V_n}{\partial r} + \frac{V_n V_r}{r} \right) \right] \sin \theta = 0. \end{aligned}$$

La deuxième équation de (1) donne une équation semblable où les rôles de $\sin \theta$ et $\cos \theta$ sont intervertis. Il faut donc que les facteurs de $\sin \theta$ et $\cos \theta$ soient nuls respectivement. D'où le système d'équations :

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial r} - \eta \left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{V_r}{r^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} \right) + \rho \left(V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{V_r^2}{r} \right) = 0 \\ \eta \left(\frac{\partial^2 V_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_n}{\partial r} - \frac{V_n}{r^2} + \frac{\partial^2 V_n}{\partial z^2} \right) - \rho \left(V_r \frac{\partial V_n}{\partial r} + \frac{V_n V_r}{r} \right) = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} - \rho g = 0 \\ \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} = 0. \end{array} \right.$$

De la dernière équation, on tire :

$$rV_r = a(z) \quad \text{ou} \quad V_r = \frac{a(z)}{r}.$$

L'écoulement au travers de la surface latérale d'un cylindre à section circulaire de rayon r et de hauteur dz est :

$$Q = \int_0^{2\pi} rV_r d\theta dz.$$

Mais cet écoulement est nul au contact des limites, donc :

$$a(z) = 0, \quad V_r = 0.$$

En posant $V_n = r\omega$, (7) devient :

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta p}{\delta r} - \rho r \omega^2 = 0 \\ \frac{\delta^2 \omega}{\delta r^2} + \frac{3}{r} \frac{\delta \omega}{\delta r} + \frac{\delta^2 \omega}{\delta z^2} = 0 \\ \frac{\delta p}{\delta z} - \rho g = 0 \\ V_r = 0. \end{array} \right.$$

On en tire immédiatement :

$$\frac{\delta^2 p}{\delta r \delta z} = \frac{\delta(\rho r \omega^2)}{\delta z} = \frac{\delta \rho g}{\delta r} = 0,$$

c'est-à-dire :

$$r\omega^2 \frac{\delta \rho}{\delta z} + \rho \omega^2 \frac{\delta r}{\delta z} + \rho r \frac{\delta \omega^2}{\delta z} = 0,$$

ρ est une constante, r , une variable indépendante; donc :

$$\frac{\delta \omega}{\delta z} = 0$$

et :

$$\frac{\delta^2 \omega}{\delta r^2} + \frac{3}{r} \frac{\delta \omega}{\delta r} = 0.$$

équation qui, intégrée, donne :

$$\omega = \frac{C_1}{r^2} + C_2,$$

ω devant être constant aux limites, les seules limites qui peuvent satisfaire à la question sont celles où r est constant. Ce sont donc deux cylindres concentriques.

En toute rigueur, on aperçoit que le mouvement plan supposé n'est possible que dans le cas de cylindres de révolution coaxiaux indéfinis. Les auteurs qui ont expérimenté sur des cylindres concentriques ont trouvé des résultats corrects, s'ils ont su éliminer l'influence des bouts.

Au contraire, tous les autres corps de révolution, pour lesquels l'hypothèse du mouvement plan est inconciliable avec les équations complètes, ont donné lieu à des contradictions avec l'expérience.

Nous devons donc rechercher la confirmation de l'hypothèse, suivant laquelle les termes d'inertie seraient responsables des anomalies signalées, soit par la visualisation des lignes de courant, soit dans les mesures à très petites vitesses qui, par diminution relative des termes en $\rho \frac{du}{dt}$, $\rho \frac{dv}{dt}$, $\rho \frac{dw}{dt}$, des équations (1) doivent atténuer, sinon faire disparaître les anomalies, soit enfin par augmentation de la viscosité qui accroîtra l'importance relative des termes en $\eta \Delta u$, $\eta \Delta v$, $\eta \Delta w$, de ces mêmes équations (1).

Remarque importante.

Une telle démonstration, faite avec les équations de NAVIER, ne pourrait s'effectuer si l'on partait des équations de STOKES. En effet, examinons le système (8) : les trois dernières équations se retrouvent sans modification ; mais la première se réduit à $\frac{\delta p}{\delta r} = 0$, puisque tous les termes des équations de NAVIER où ρ est en facteur, sont justement négligés dans les équations de STOKES, sauf celui dû à la pesanteur. Nous ne pourrions donc rien en conclure, quant à la possibilité ou à l'impossibilité du mouvement plan dans le cas des hypothèses de STOKES.

En résumé, c'est donc dans l'intervention des termes d'inertie ou dans la possibilité de mouvements autres que des mouvements plans dans le cas des équations de STOKES qu'il doit falloir rechercher la cause des anomalies signalées. Nous verrons après l'exposé des expériences ce qu'il faut en penser.

CHAPITRE III

DESCRIPTION DES APPAREILS ET CARACTÉRISTIQUES DES HUILES EMPLOYÉES

A. LES APPAREILS

Les appareils ont pour but la mesure expérimentale du moment exercé ou subi par un corps de révolution au sein d'un fluide visqueux, ce corps étant en rotation par rapport à une enveloppe homothétique concentrique.

Nous avons monté toute une série d'appareils qui nous permettent d'entretenir la rotation, soit de la sphère intérieure, soit de l'enceinte extérieure. Des systèmes de démultiplication convenables nous procurent des vitesses de rotation variables continuellement de 1 tour à 60 tours-minute. La réalisation ne présente aucune difficulté particulière; le dispositif expérimental doit toutefois être conçu en vue d'une mesure commode et précise du moment.

1. Rotation de la sphère intérieure.

La figure 2 montre un type d'appareil où la rotation est imprimée à la sphère intérieure. A cet effet, la sphère est suspendue à un fil de torsion encastré à une de ses extrémités dans une pince solidaire de l'arbre du moteur; elle est placée concentriquement à une sphère creuse, l'espace interstitiel étant rempli du liquide à étudier.

Un tube solidaire de l'arbre du moteur coiffe le fil sur une partie de sa longueur; il est terminé par un disque gradué de plan perpendiculaire au fil. Juste en dessous de lui est placée une aiguille fixée sur le fil.

Lorsqu'un couple est exercé sur la sphère au sein du fluide visqueux, du fait de la rotation imposée $\vec{\omega}$, le fil se tord d'un certain angle θ ; l'aiguille recule de l'angle θ_0 par rapport au repère initial. On lit cet angle en marche; la torsion totale est alors :

$$\theta = \theta_0 \frac{h_1 + h_2}{h_1},$$

h_1 , distance de l'aiguille à l'encastrement supérieur $h_1 + h_2$, longueur totale du fil.

Si l'on a mesuré préalablement la constante C, on en déduit le moment M exercé sur la sphère : $M = C\theta$.

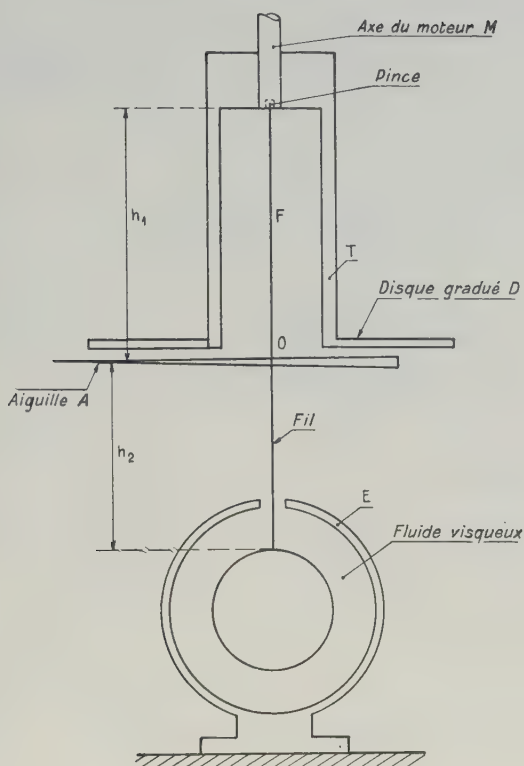


Fig. 2.

Une difficulté provient du fait que l'incertitude sur la position de l'aiguille est de l'ordre de 1 ou 2 degrés ; ceci est négligeable pour une torsion suffisante mais crée une erreur relative trop importante pour les mesures de très faibles moments.

2. Mesure des très faibles moments.

L'appareil 1 a donc été perfectionné pour la mesure des très faibles moments de la manière suivante (voir fig. 3) :

L'aiguille est remplacée par un miroir non figuré sur le dessin ; le tube solidaire de l'arbre du moteur porte 2 couronnes : l'une (coupe *a*) presque entièrement conductrice à l'exception d'une touche isolante *e* ; l'autre (coupe *b*), complémentaire de la précédente, isolante en dehors d'une touche *t* conductrice placée au droit de *e*. Grâce à un jeu de balais fixes b_1 , b_2 , b_3 , le condensateur C est mis en communication avec un générateur 700 volts continu tout le temps de la rotation, sauf au moment où b_1 arrive sur *e* ; à ce moment, le balai b_2 ferme le circuit du condensateur sur un tube à néon N. L'image de celui-ci, reprise par le miroir du fil de torsion, est envoyée sur une échelle graduée.

En l'absence de couple, on règle l'appareil de telle sorte que l'image du tube illuminé quand l'arbre du moteur passe par une position donnée, coïncide avec le zéro de l'échelle. Si la partie du fil comprise entre l'encastrement supérieur et le miroir se tord d'un angle α , l'image du tube sur l'échelle est décalée d'une quantité correspondant à 2α .

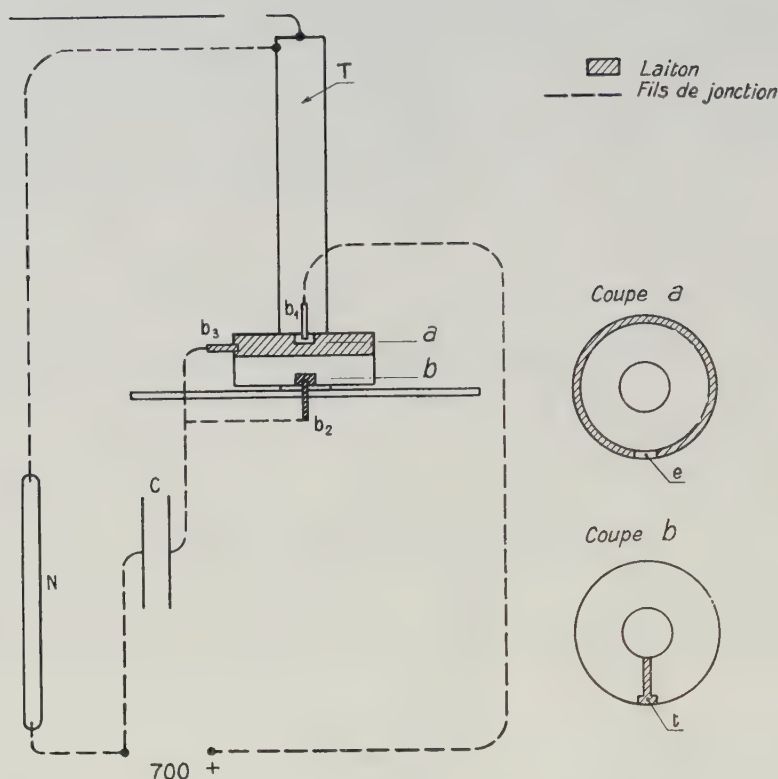


Fig. 3.

Ce procédé stroboscopique nous a permis de mesurer avec précision des moments extrêmement faibles.

3. Rotation de la sphère extérieure.

Nous avons essayé aussi des appareils où la rotation était imposée à l'enveloppe, ce qui facilite beaucoup la mesure du couple sur la sphère intérieure, celle-ci étant fixe une fois le régime établi. En contre partie, la position de la sphère interne devenait instable pour certaines fréquences. Cette dernière, entraînée par un mouvement de rotation arrivait à frotter sur l'enceinte. Nous avons pu éliminer ce défaut en plaçant, sur l'axe de révolution commun et en dessous de l'ensemble, un électro-aimant qui augmentait le couple de rappel sur la verticale, de la sphère rendue magnétique par un procédé quelconque.

Malgré de bons résultats obtenus par cette méthode, la sujétion ainsi introduite nous a fait préférer des appareils du type décrit ci-dessus.

4. Correction de température.

Une autre difficulté expérimentale provient du fait que la température ne peut être considérée comme rigoureusement constante au cours de la mesure ; elle varie de quelques dixièmes de degré. Dans ce cas nous prenons comme base de référence la viscosité à la température

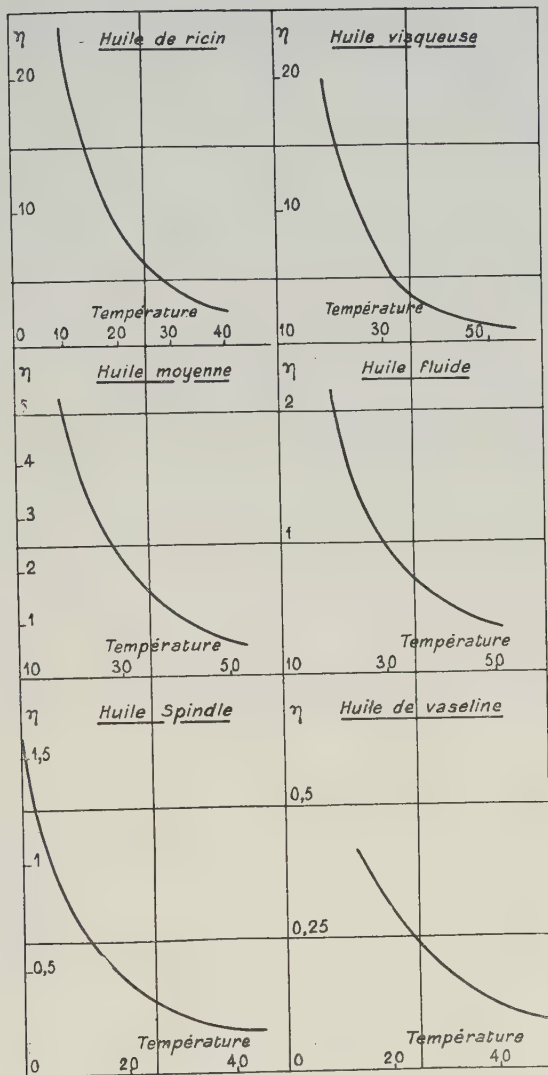


Fig. 4.

moyenne et nous rapportons les mesures à cette viscosité en multipliant les moments lus par un coefficient correctif égal au rapport des viscosités à la température de la mesure d'une part et à la température moyenne de référence d'autre part. Nous rejetons les mesures au cours desquelles la viscosité a varié de plus de 3 p. 100 autour de la valeur moyenne. La correction citée présume en effet la proportionnalité du moment à la viscosité. Or nous verrons que pour certaines vitesses critiques il n'en est pas ainsi. La correction n'est donc justifiée que si on l'emploie sur un intervalle petit de variation de η ; l'erreur qu'elle laisse subsister est du deuxième ordre au plus.

B. CARACTÉRISTIQUES DES HUILES EMPLOYÉES

Le tableau ci-dessous et les courbes η , T de la figure 4 résument ces caractéristiques.

TABLEAU

Viscosité des huiles employées à différentes températures

Huiles employées	Viscosité cinématique en centiskokes à des températures voisines de				Densité à 15° C	Viscosité en poises à des températures voisines de			
	50° C	35° C	20° C			50° C	35° C	30° C	
Huile de ricin.....	{ // //	{ 300 à 38°	{ 1.215 à 18,5	{ 7.130 à 0,2°	{ 0,970	{ // //	{ 3,0 à 38°	{ 11,78 à 18,5° 12,4 à 16,2°	{ 63,3 à 0,2°
Huile minérale visqueuse.	{ 135,2 à 54,7°	{ 380 à 36,6°	{ 1.998 à 19,3°	{ // //	{ 0,9059	{ 1,196 à 54,7°	{ 3,408 à 36,6°	{ 18,3 à 19,3°	{ //
Huile minérale moyenne.	{ 66,5 à 53,9°	{ 178,5 à 35,2°	{ 513 à 20,5°	{ // //	{ 0,9180	{ 0,596 à 53,9°	{ 1,616 à 35,2°	{ 4,693 à 20,5°	{ //
Huile minérale fluide...	{ 39,4 à 52,8°	{ 88,4 à 35,7°	{ 241 à 20,3°	{ // //	{ 0,9105	{ 0,350 à 52,8°	{ 0,794 à 35,7°	{ 2,14 à 20,3°	{ //
Huile «spindle».....	{ // //	{ 26,3 à 30°	{ // //	{ 125 à 4,5°	{ 0,9230	{ 0,131 à 40,3°	{ 0,243 à 30°	{ 0,444 à 19,2°	{ 1,146 à 4,4°
Huile de vaseline.....	{ 10,9 à 50,7°	{ 18,4 à 34,7°	{ 42,5 à 17°	{ 48,3 14°	{ 0,8653	{ 0,094 à 50,7°	{ 0,159 à 34,7°	{ 0,285 à 21°	{ //

C. APPLICATION AU COUPLE EXERCÉ SUR DES CORPS DE RÉVOLUTION CONCENTRIQUES

Nous avons donc, avec ces appareils et ces huiles, repris les expériences de A. GUILLET, en les étendant à d'autres corps et dans des intervalles de vitesse et de viscosité plus importants que ceux explorés par cet auteur. Nous avons tâché de déterminer le domaine où les équations de STOKES représentent correctement les phénomènes et ce qui se passe dans le domaine anormal, aidé en cela par la visualisation des lignes de courant. Nous verrons ensuite la manière très particulière dont interviennent les termes d'inertie pour déterminer le mouvement du fluide.

CHAPITRE IV

MESURE EXPÉRIMENTALE DU MOMENT **M** POUR DES SPHÈRES

A. DÉTERMINATION DE LA FORMULE DONNANT LE COUPLE POUR DES SPHÈRES CONCENTRIQUES

L'établissement de la formule donnant M , signalée page 9, est valable, que le mouvement soit plan ou non. Mais l'intégration ne peut se faire qu'en employant les équations de STOKES et dans l'hypothèse du mouvement plan. Le calcul du couple exercé sur l'une des deux sphères concentriques est classique. Nous donnerons seulement le résultat (pour le développement des calculs voir, par exemple, BOUSSE. *loc. cit.*, p. 216, 219, 237, 239). On a :

$$M = 8\pi\eta\omega \frac{R_e^3 \times R_i^3}{R_e^3 - R_i^3} \quad (1)$$

où R_e et R_i sont les rayons des sphères extérieures et intérieures respectivement, ω la vitesse de rotation relative des sphères, η la viscosité, M le couple exercé par le fluide sur l'une des sphères en valeur absolue.

C'est, en outre, à la vérification expérimentale de cette formule qu'est destiné l'appareillage décrit ci-dessus qui permet la mesure de M , l'entretien et la mesure de ω .

Les expériences que nous avons faites et que nous allons exposer, montrent que les moments calculés par la formule (1) sont, tantôt égaux aux moments mesurés $C\theta$, tantôt différents. Nous allons donc indiquer les résultats expérimentaux pour les diverses huiles et sphères utilisées.

B. EXPOSÉ DES EXPÉRIENCES

I. Huiles de viscosité supérieure à 3 poises.

Nous avons successivement utilisé de l'huile de ricin (viscosité 15 poises à la température d'emploi), de l'huile minérale épaisse (19 poises) et semi-fluide (4 à 5 poises).

Le domaine de vitesse était limité supérieurement à 70 tours-minute. Pour tout ce domaine, quels que soient la nature des huiles employées et l'espace interstitiel laissé entre les sphères concentriques (2 mm à l'infini), nous avons toujours obtenu une viscosité en plein accord avec celle mesurée par la méthode des tubes, méthode sûre à laquelle nous accordons toute notre confiance. C'est donc dire que, dans ce cas, les anomalies de GUILLET n'existent

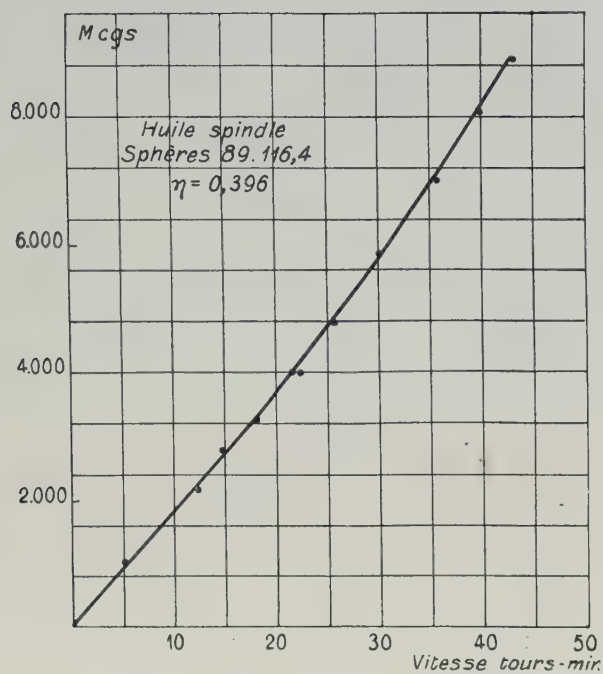


Fig. 5.

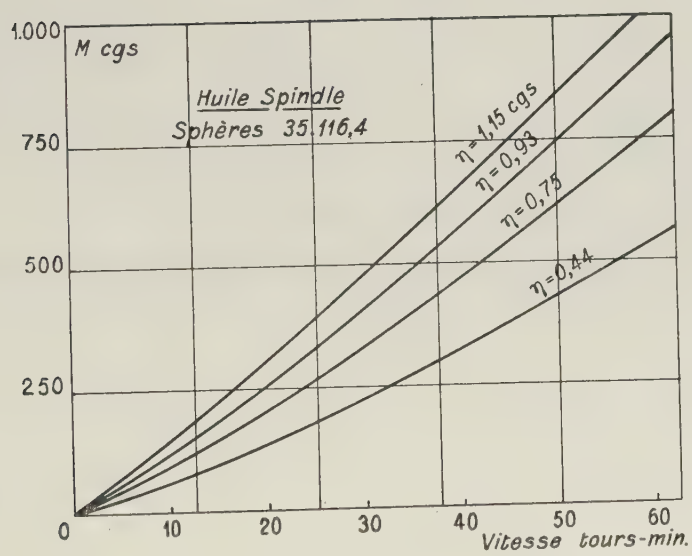


Fig. 6.

pas et que les hypothèses classiques de STOKES rendent parfaitement compte des faits. Nous verrons ultérieurement que le mouvement des particules est plan, c'est-à-dire qu'une particule déterminée se déplace sur une circonférence d'axe confondu avec l'axe de rotation, ce qu'impliquent les hypothèses de STOKES.

II. Huiles de viscosité inférieure à 3 poises.

a. Pour une huile de viscosité égale à 2,5 poises, les anomalies commencent à se manifester. Les moments mesurés présentent des excédents de l'ordre de 5 à 6 p. 100 par rapport au moment classique de la formule (1) pour les plus grandes vitesses employées (environ 60 tours-minute). Nous sommes cependant encore loin des anomalies signalées par A. GUILLET qui atteignent 40 p. 100.

b. Si nous utilisons alors de l'huile spindle dans un domaine de viscosité variant de 1 à 0,3 poise et jusqu'à des vitesses de 70 tours-minute, on voit apparaître le phénomène traduit par la figure 5. La courbe est obtenue pour une viscosité constante $\eta = 0,396$; elle donne le moment mesuré M , en fonction de ω , et comporte trois segments : l'un passant par l'origine et tel que la concordance entre le moment mesuré et le moment calculé par la formule (1) est assurée aux erreurs d'expérience près, puis, pour des vitesses d'autant plus faibles que la viscosité est petite, un deuxième segment linéaire de pente plus élevée et qui se raccorde au premier par un point anguleux, le moment mesuré étant alors supérieur à celui calculé.

c. Pour préciser ce phénomène, nous avons fait varier la température, donc la viscosité de l'huile employée, en nous servant de plusieurs systèmes de sphères différents. Les résultats sont tous identiques à ceux traduits par les figures 6, 7 et 8 qui se rapportent à trois espaces interstitiels respectivement égaux à 40,7, 34,2, 25,7 mm. Le réseau de courbes représenté sur chacune de ces figures a été obtenu de la manière suivante : à température constante, donc à viscosité constante, on mesure le moment M en fonction de la vitesse de rotation angulaire d'une sphère par rapport à l'autre ; puis on répète cette mesure pour une autre température, donc une autre viscosité de l'huile. Chacune des courbes constitutives du réseau qui forme une figure est donc obtenue à viscosité constante.

On peut remarquer sur ces trois figures les faits essentiels suivants :

- 1° Les courbes $M(\omega)$ sont des segments rectilignes dans le domaine η, ω exploré ;
- 2° Les pentes sont discontinues, les différents segments se raccordant entre eux par des points anguleux ;
- 3° Le premier segment linéaire correspond toujours à un moment $M(\omega)$ parfaitement classique et conforme à ce que laisse prévoir la formule (1). C'est donc dire qu'on peut toujours trouver un domaine où les phénomènes GUILLET n'existent pas et où les hypothèses classiques de STOKES rendent parfaitement compte des faits. Ce domaine est d'autant plus restreint que la viscosité est plus faible, mais s'observe toujours. Nous verrons ultérieurement (chapitre VI) que la visualisation des lignes de courant apporte, dans ce cas, une confirmation de la théorie, le mouvement restant toujours plan dans le domaine des premiers segments ;

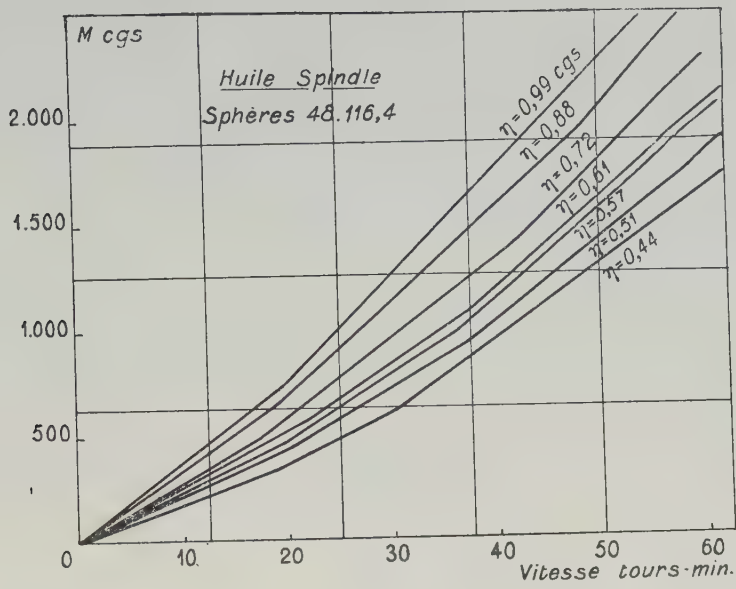


Fig. 7.

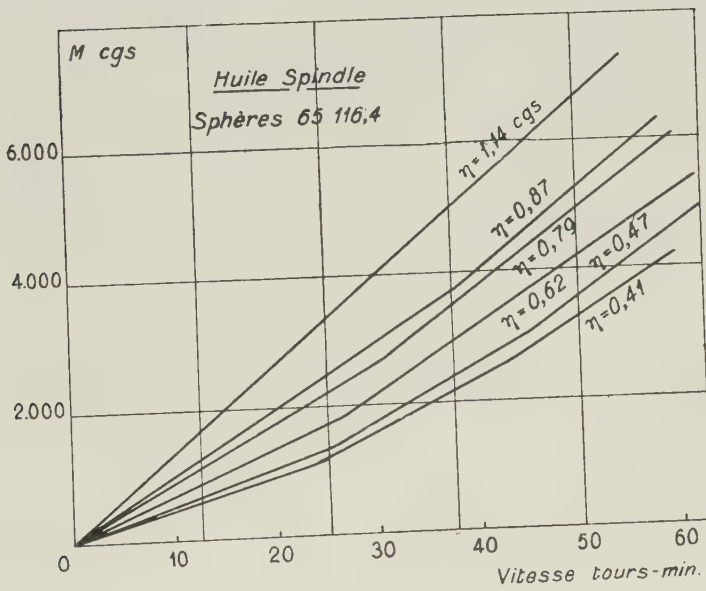


Fig. 8.

4° Dans le domaine des segments anomaux, les moments sont seulement des fonctions linéaires de ω . Les termes d'inertie, négligés dans les équations de STOKES, n'interviennent donc pas directement pour donner lieu à des forces proportionnelles au carré de la vitesse par exemple, et qui, s'ajoutant aux forces linéaires, incurveraient les segments. Mais, ces termes, qui interviennent sans aucun doute, manifestent leur action de façon discontinue; nous verrons ultérieurement que les points anguleux des réseaux de courbes correspondent à des changements dans l'organisation du champ des vitesses;

5° Enfin, si l'on prolonge les segments anomaux d'un même réseau, on constate que

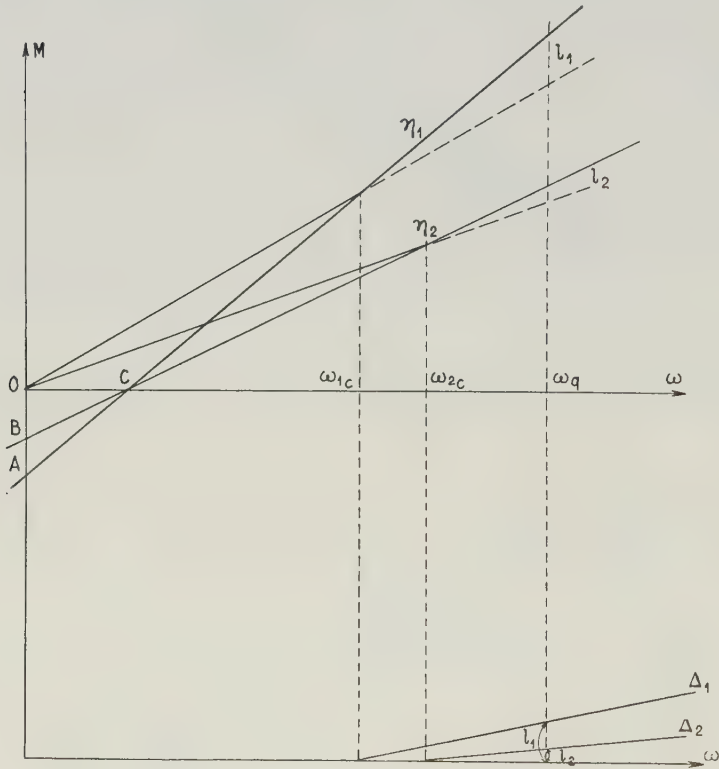


Fig. 9.

les deuxièmes segments se coupent tous en un point situé sur l'axe des ω , soit C, les troisièmes également (voir fig. 9). *Fait essentiel, ces segments anomaux conservent la proportionnalité de M par rapport à η .*

Vérifions cette proposition par un examen quantitatif sur les courbes. Prenons par exemple la figure de ce chapitre, relative à la sphère de 48 mm de diamètre et à l'huile spindle, et isolons les courbes pour des viscosités de 0,995 et 0,615 poises. A partir des points ω_{1c} et ω_{2c} , traçons les droites Δ_1 et Δ_2 dont les ordonnées, pour des vitesses de rotation ω_q , sont égales à la différence des ordonnées entre la courbe M (ω) réelle et celle que l'on obtiendrait si le mouvement plan correspondant au premier segment s'était continué jusqu'à cette vitesse. Nous remarquons que le rapport des coefficients angulaires de ces

droites, soit r , est sensiblement égal au rapport des coefficients de viscosité $\frac{\eta_1}{\eta_2} = r = 1,62$. Ceci peut se traduire d'une autre façon : nous avons constaté que les seconds segments concourent en un point C de l'axe des ω et que le rapport $\frac{OA}{OB}$ des ordonnées à l'origine est lui-même égal à $r = \frac{\eta_1}{\eta_2}$. Remarquons qu'il est bien entendu que le rapport des pentes des premiers segments classiques est lui-même égal à r .

En résumé, les segments anomaux font intervenir des forces linéaires en ω , proportionnelles encore à η .

Avant de développer plus avant ces conclusions, nous devons lever une objection : nous n'avons observé les anomalies que pour des systèmes de sphères. Or nous avons montré que, si elles se produisaient dans ce cas, elles devaient se produire pour tous les autres corps de révolution, sauf les cylindres.

Il s'agirait donc de montrer que les anomalies ne sont pas seulement attachées aux sphères, mais à d'autre corps. Ceci fera l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE V

CALCUL ET MESURE DU COUPLE POUR DES ELLIPSOIDES DE RÉVOLUTION

CAS DU CYLINDRE DE RÉVOLUTION

Aucun calcul du couple basé sur les équations de STOKES n'a été fait en dehors du cas du cylindre ou de la sphère ou du disque infiniment plat.

Pour corroborer les conclusions précédemment citées, nous avons choisi comme autres corps les ellipsoïdes de révolution, pour lesquels on trouvera ci-après :

a. Le calcul du couple à partir des équations de STOKES ;

b. Les vérifications expérimentales des formules établies, dans un domaine où nous avons montré pour les sphères la validité de ces équations et l'observation d'anomalies encore plus accentuées que pour les systèmes de sphères centrées, pour les autres domaines.

Enfin, nous indiquerons la nature des résultats pour les cylindres de révolution.

A. Calcul du moment exercé par un fluide visqueux indéfini sur un ellipsoïde de révolution.

Reprenons l'équation fondamentale que nous avons établie au chapitre premier et à laquelle doit satisfaire le champ des vitesses en régime permanent, circulaire, plan et pour des équations linéarisées ou non :

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} = 0. \quad (1)$$

D'autre part, les équations générales des quadriques homofocales peuvent être écrites sous la forme :

$$\frac{r^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad \text{ou} \quad \frac{r^2}{c^2 ch^2 \xi} + \frac{z^2}{c^2 sh^2 \xi} = 1$$

r et z étant les coordonnées cylindriques, ξ le paramètre définissant l'ellipsoïde. Les coordonnées peuvent encore être représentées par :

$$r = c \, ch \xi \cos \lambda, \quad z = c \, sh \xi \sin \lambda.$$

Nous définissons ainsi des ellipsoïdes aplatis non par les variables r, z , mais par les variables ξ, λ .

On aurait de même pour les ellipsoïdes allongés :

$$\frac{r^2}{c^2 sh^2 \xi} + \frac{z^2}{c^2 ch^2 \xi} = 1$$

avec :

$$r = c sh \xi \cos \lambda, \quad z = c ch \xi \sin \lambda$$

Dans l'équation (1), passons des variables r, z , aux variables ξ, λ . Cette transformation est une transformation conforme.

L'équation (1) peut s'écrire :

$$\Delta_{rz} \omega + \frac{3}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} = 0 \quad (2)$$

Or, on a dans une transformation conforme où $r = P(\xi, \lambda), z = Q(\xi, \lambda)$:

$$\Delta_{rz} \omega \left[\left(\frac{\partial P}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial \lambda} \right)^2 \right] = \Delta_{\xi, \lambda} \omega \quad (3)$$

(voir par exemple GOURSAT, tome I, chapitre III, p. 158).

Utilisons cette propriété pour le changement de variables r, z en ξ, λ dans l'équation (2). On a :

1° Pour les ellipsoïdes aplatis :

$$r = P(\xi, \lambda) = c sh \xi \cos \lambda, \quad z = Q(\xi, \lambda) = c ch \xi \sin \lambda$$

D'où :

$$\Delta_{rz} \omega = \frac{\Delta_{\xi, \lambda} \omega}{c^2 [sh^2 \xi \cos^2 \lambda + ch^2 \xi \sin^2 \lambda]} \quad (4)$$

D'autre part :

$$\frac{3}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} = \frac{3}{r} \left[\frac{\partial \omega}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\partial \omega}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial r} \right]$$

Et, par conséquent :

$$\frac{3}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} = \frac{3}{c^2} \left[\frac{\partial \omega}{\partial \xi} \times \frac{th \xi}{sh^2 \xi \cos^2 \lambda + ch^2 \xi \sin^2 \lambda} - \frac{\partial \omega}{\partial \lambda} \times \frac{tg \lambda}{sh^2 \xi \cos^2 \lambda + ch^2 \xi \sin^2 \lambda} \right]$$

Sachant qu'une solution constante aux limites est déterminée de façon unique, ω doit être fonction de ξ seul. Donc :

$$\frac{\delta \omega}{\delta \lambda} = 0$$

Et l'équation (2) devient :

$$\frac{\delta^2 \omega}{\delta \xi^2} + 3th\xi \frac{\delta \omega}{\delta \xi} = 0.$$

Cette équation différentielle admet comme solution :

$$\omega = K \left[\frac{sh\xi}{ch^3\xi} - \text{arc cotg } sh\xi \right] + C_2$$

La constante $C_2 = 0$, car $\omega = 0$ à l'infini (cas de l'ellipsoïde intérieur tournant dans une enveloppe fixe éloignée) et le terme entre parenthèses est égal à 0 pour ω infini.

Si on fait intervenir l'excentricité de l'ellipsoïde intérieur, $e = \frac{1}{ch\xi_1}$:

$$2K = \frac{\omega_0}{e \sqrt{1 - e^2 - \text{arc sin } e}}$$

Si le milieu extérieur est infini, on peut assimiler l'ellipsoïde extérieur à une sphère de rayon $R = \lim \sqrt{r^2 + z^2}$.

Soit :

$$R = c \sqrt{ch^2 \cos^2 \lambda + sh^2 \xi \sin^2 \lambda} \rightarrow c sh\xi \text{ si } \xi \rightarrow \infty$$

On a donc :

$$M = 8\pi\eta\omega R^3 = \frac{8\pi\eta\omega_0 c^3}{e \sqrt{1 - e^2 - \text{arc sin } e}} \left[sh^3 \xi \left(\frac{sh\xi}{ch^3\xi} - \text{arc cotg } sh\xi \right) \right]$$

Et pour $\xi \rightarrow \infty$, le terme entre crochets dans M tend vers $\frac{2}{3}$; d'où :

$$M = \frac{2}{3} \times \frac{8\pi\eta\omega_0 c^3}{e \sqrt{1 - e^2 - \text{arc sin } e}} \quad (5)$$

2° Pour les ellipsoïdes allongés :

Les mêmes raisonnements s'appliquent identiquement. Le changement de variables r, z , en ξ, λ , dans (2) donne de manière analogue, ω étant fonction de ξ seulement :

$$\frac{\delta^2 \omega}{\delta \xi^2} + 3\text{coth}\xi \frac{\delta \omega}{\delta \xi} = 0$$

dont l'intégrale générale est :

$$\omega = K \left[\frac{ch\xi}{sh^2\xi} + \text{Log th } \frac{\xi}{2} \right] + C_2$$

et si on introduit l'excentricité e , avec $C_2 = 0$:

$$M = \frac{8\pi\eta\omega_0 c^3}{\frac{e}{1-e^2} - \text{Log} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}} \left(\lim_{\xi \rightarrow \infty} sh^2\xi \left[\frac{ch\xi}{sh^2\xi} + \text{Log th } \frac{\xi}{2} \right] \right), \text{ si } \xi \rightarrow \infty$$

D'où :

$$M = \frac{2}{3} \times \frac{8\pi\eta\omega_0 c^3}{\frac{e}{1-e^2} - \text{Log} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}} \quad (6)$$

Remarque :

Si e tend vers 0 (cas de la sphère), on a évidemment :

$$M_{\text{aplati}} = M_{\text{allongé}} = 8\pi\eta\omega_0 c^3.$$

D'autre part, le disque circulaire plat est un cas particulier de l'ellipsoïde aplati où $e = 1$; d'où :

$$M = \frac{32}{3} \omega_0 \eta c^3. \quad (7)$$

B. Résultats expérimentaux.

Nous nous sommes proposés de soumettre les formules précédentes relatives aux ellipsoïdes au contrôle expérimental. Pour cela, nous avons utilisé deux ellipsoïdes de révolution de caractéristiques suivantes :

Ellipsoïde aplati : $2a = 5$ cm, $2b = 2$ cm.

Ellipsoïde allongé : $2a = 2$ cm, $2b = 5$ cm.

Les corps de révolution étaient placés au centre d'un bocal cylindrique contenant le fluide. Ce bocal avait 17 cm de diamètre et contenait une hauteur de 25 cm d'huile. Nous considérons que, en égard des dimensions des ellipsoïdes et de la sphère, ces derniers peuvent être considérés comme baignant dans un milieu infini. A titre de vérification, une sphère de 50 mm de diamètre concentrique par rapport à une de 170 mm, subit un moment supérieur de 2,5 p. 100 à celui qu'elle subirait dans un milieu infini.

Pour étendre ces formules au cas du disque, nous avons tenu compte de l'épaisseur de celui-ci, en assimilant la surface latérale à celle d'un petit cylindre de révolution de diamètre

égal à celui du disque et de hauteur h égale à son épaisseur. L'intégration des équations de NAVIER donne, dans le cas du cylindre, le moment élémentaire pour une hauteur Δz :

$$\Delta M = 4\pi\eta\omega R^2\Delta z.$$

Les formules M calculées sont donc établies en ajoutant les effets sur les deux faces planes et sur la surface cylindrique. Le moment du disque circulaire plan est donc :

$$M = 2 \times \frac{32}{3} \omega \eta R^3 + 4\pi\eta\omega R^2 h, \quad (8)$$

h , étant l'épaisseur du disque.

Comme dans le cas des sphères, les segments classiques *pour les ellipsoïdes* s'étendent à

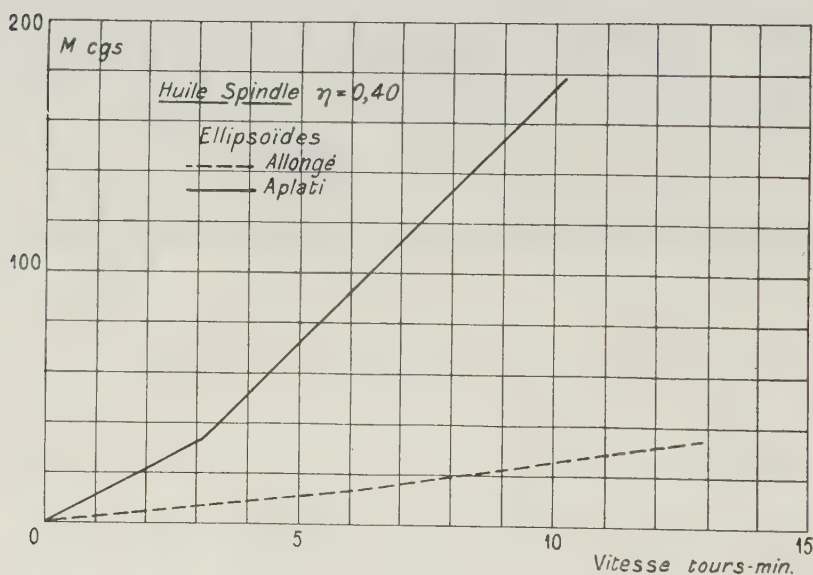


Fig. 10.

tout le domaine de vitesse pour des huiles de 3 poises et plus. Pour une viscosité de 4 déci-poises, ce segment est limité à une valeur inférieure à 60 tr/mn ; après quoi, si ω croît, on a des segments linéaires de nature identique à ceux obtenus avec les sphères (voir fig. 10). Les écarts d'avec la loi classique et la facilité à voir apparaître des régimes anormaux sont plus grand avec un ellipsoïde aplati qu'avec un ellipsoïde allongé.

Le disque donne des résultats de même nature que ceux obtenus avec l'ellipsoïde aplati.

Quant aux cylindres, ils ont donné lieu à de nombreux travaux expérimentaux. Citons ceux de LEWIS (10), MAXWELL (11), GUILLET (12), SCHWARTZ (13). C'est pourquoi, nous nous sommes limités, en utilisant la méthode d'immersion, à l'emploi de deux cylindres, l'un

de 60 mm, l'autre de 90 mm de diamètre, dans une enceinte de 123 mm de diamètre. Comme tous les auteurs précités, nous avons vérifié la formule classique :

$$M = 4 \pi \eta \omega \frac{R_e^2 R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} h \quad (9)$$

conformément aux prévisions théoriques du chapitre II, et, ceci, même pour l'huile spindle, à 0,3 poise pour 60 tours-minute.

En conséquence, *l'hypothèse, selon laquelle le mouvement plan devait être réalisé dans le cas du cylindre et se traduire donc par un moment classique, se trouve vérifiée.*

Nous allons maintenant signaler les résultats de nos observations visuelles.

CHAPITRE VI

VISUALISATION DES LIGNES DE COURANT

A. Généralités.

Les travaux antérieurs sur la visualisation des filets fluides liquides portent surtout sur des écoulements à deux dimensions. Citons cependant dans l'étude du cas général les travaux d'AhLBORN (14).

Récemment CHARRON s'est occupé de la question et a obtenu des résultats plus intéressants (15).

Les méthodes employées comportent principalement :

a. *La méthode de l'iode*, utilisée par exemple par SACKMANN (16) et destinée à se faire une idée des tourbillons sur les parois. À cet effet, ces dernières sont recouvertes d'une mince couche d'argent réduit (gélantino-bromure exposé, développé et fixé). Le filet fluide est constitué par une solution d'iode dans l'iodure de potassium; là où il se rapproche de la paroi traitée, il donne avec l'argent de l'iodure d'argent blanc;

b. *L'émission dans le fluide* à étudier de filets colorés de ce même fluide ou d'un autre de densité égale (16);

c. *La mise en suspension dans le fluide* de particules solides et microscopiques qui sont entraînées par le filet.

Dans le cas qui nous occupe, c'est-à-dire celui de deux sphères concentriques en rotation, nous nous sommes bornés à employer principalement la dernière méthode :

En effet la méthode de l'iode a été employée avec de l'eau; nous aurions pu malgré cela songer à sa transposition sur des liquides gras si les premiers résultats que nous avons obtenus par une autre méthode ne nous avaient convaincus de son inefficacité en la circonstance; nous en montrerons du reste ultérieurement les raisons.

D'autre part, dans le cas de l'émission de filets colorés, il est nécessaire d'introduire les ajutages émetteurs suffisamment loin de la zone à étudier, afin que les perturbations créées de ce fait aient le temps de disparaître. Or ici tous les points du liquide font partie de la zone d'étude.

C'est pourquoi nous nous sommes limités à l'emploi de particules solides dans le liquide. Nous mettons cette méthode en œuvre de la manière suivante :

B. Description de l'appareillage et des expériences.

a. Appareil :

Nous avons fait fabriquer par l'Institut d'Optique une sphère creuse en verre, taillée et polie, séparable en deux parties par l'équateur. Les dimensions sont de 80 mm de diamètre intérieur, l'épaisseur des parois étant de 10 mm. Un trou de 4 mm est percé au pôle supérieur afin de donner passage au fil de suspension de la sphère intérieure en métal, de 35 mm de diamètre, placée concentriquement à la première. Tous les autres dispositifs annexes restent identiques à ceux déjà décrits pour la mesure des très petits couples avec un appareil du type 1. Nous avons utilisé une huile de vaseline transparente au voisinage de $\eta = 0,25$ poises.

b. Éclairage :

Il est tout d'abord indispensable que la lampe ne chauffe pas le liquide de façon appréciable pour éviter la superposition de mouvements de convection à ceux étudiés.

À cet effet, nous avons placé la sphère sur un bâti en aluminium percé d'un trou cylindrique rempli d'eau, la fermeture inférieure étant assurée par une lame de verre. La lampe type auto est placée sur la ligne des pôles de la sphère et est enfermée dans une cheminée ventilée par un courant d'air comprimé. Son emplacement a été choisi de telle sorte que la région équatoriale soit la mieux éclairée. Les reflets parasites n'ont pu être totalement éliminés malgré un pouvoir réflecteur très faible de la sphère intérieure, préalablement dépolie par oxydation.

c. Processus expérimental :

On introduit à l'arrêt, à un endroit choisi de l'espace interstitiel, une seringue hypodermique, munie d'une aiguille coudée, et on injecte une goutte d'huile dans laquelle sont en suspension de nombreuses particules de poudre d'aluminium d'une dimension moyenne de 5 microns. Puis on établit la rotation après avoir retiré la seringue. Les particules suivent alors le filet qui passe par le point où on les a déposées et apparaissent brillamment illuminées.

Si l'on photographie alors l'ensemble, les particules isolées s'inscriront en tirets plus ou moins longs, suivant la composante de leur vitesse sur un plan normal à l'axe optique de l'appareil photographique. Si elles sont très nombreuses dans un espace déterminé, les tirets unitaires se joindront les uns les autres et formeront un trait épais et continu sur un ou deux ou même trois tours.

Cette méthode a un inconvénient : les particules dans les zones à très fortes variations de vitesse, en grandeur ou en direction, ne suivent pas rigoureusement le filet fluide ; cependant, vu leur poids très faible, les perturbations ainsi introduites sont négligeables.

Il serait sans doute intéressant de mettre au point une technique plus sûre, avec photographies simultanées par deux appareils placés perpendiculairement et restitution du tracé des filets fluides par géométrie descriptive. Rappelons cependant que nous voulions seulement dans ce chapitre contrôler les résultats expérimentaux déjà obtenus et les explications théoriques données ; c'est dans ce but précis qu'ont été entreprises les expériences de visualisation doublées de mesures de couple.

C. Résultats expérimentaux.

Les résultats des observations visuelles et des photographies seront donnés simultanément pour chaque type de régime observé. Faisons d'abord quelques remarques :

- a. Les photographies sont des négatifs;
- b. Sur la partie supérieure de chaque cliché se trouve une sorte de collerette ondulée; c'est un joint de caoutchouc transmettant la pression du montage mécanique qui applique les deux demi-sphères l'une sur l'autre;
- c. Un peu au-dessous se forment deux réflexions parasites :
 - α . Un cercle parallèle à l'équateur et situé sur la sphère extérieure qu'on pourrait prendre pour le niveau du liquide;

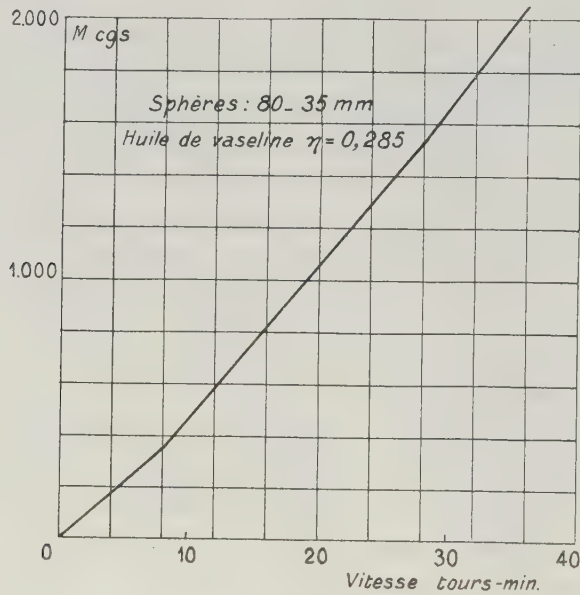


Fig. 12.

- β . Un anneau elliptique sur la sphère intérieure;
- d. L'équateur, par où se séparent les deux parties de la sphère, est marqué par une ligne fine facilement identifiable. En regardant l'ensemble du dessus, le sens de rotation de la sphère est positif;
- e. Enfin pour faciliter la compréhension des clichés de visualisation, nous leur avons associé un schéma marquant les lignes de courant à remarquer plus particulièrement.

Voyons maintenant les caractéristiques propres à chaque régime.

- a. Vitesses inférieures à 8 tours-minute :

Les observations visuelles sont en accord avec les photographies (voir photo 11) : le mouvement est *plan*. Il existe donc une conformité absolue avec les hypothèses classiques.

Le couple, mesuré simultanément, est donné par le premier segment dont la pente correspond bien au couple $M(\omega)$ calculé et ceci jusqu'à une limite d'environ 8 tours-minute (fig. 12).

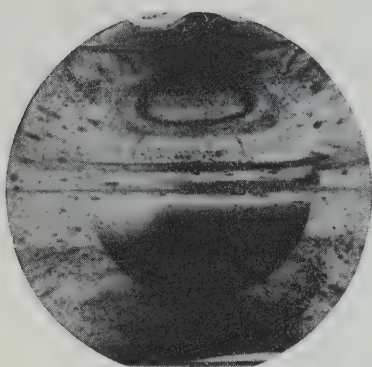
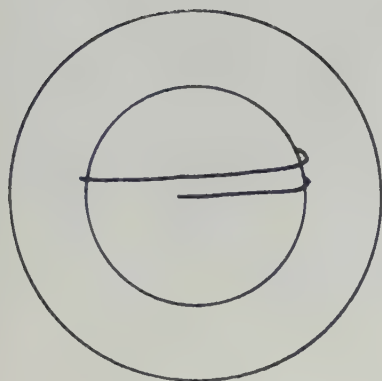


Fig. 12.

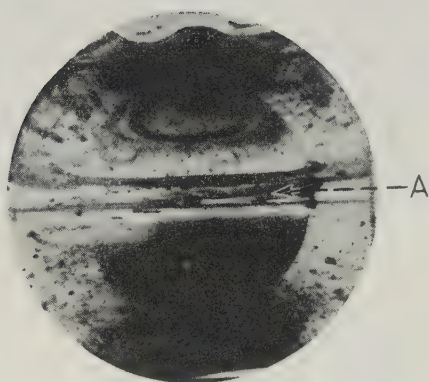
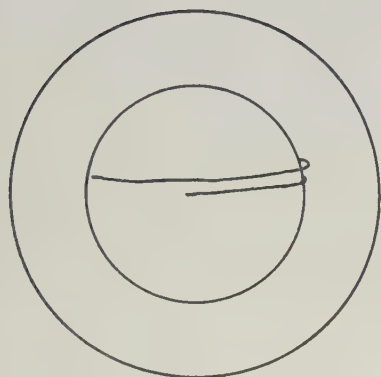


Fig. 13.

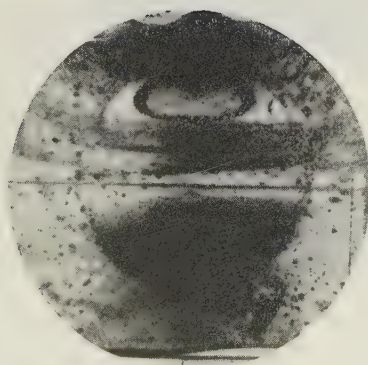
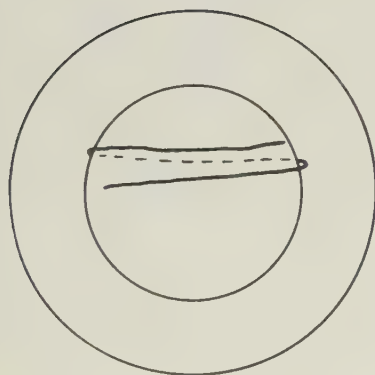


Fig. 14.

b. Vitesses de 8 tours-minute à 28 tours-minute :

Quand on augmente les vitesses, une faible composante de vitesse parallèle à l'axe des z , V_z , apparaît; les particules restent sensiblement à la même distance du centre et descendent avec une composante V_r petite. La photo 13 prise à 8 tr/mn montre l'apparition de ces composantes. Fait remarquable : les particules arrivent tangentiellement au plan équatorial et ne le traversent jamais; elles sont alors éjectées avec une vitesse V_r très grande vers la sphère extérieure. Parvenues là, elles remontent lentement vers les pôles avec une vitesse faible. On ne peut plus à ce moment prévoir une trajectoire déterminée, car les particules se répartissent de part et d'autre de la latitude de 45° qui est un lieu de débit maximum; certaines n'y parviennent pas, d'autres plus nombreuses la dépassent. Toutes ces particules sont ensuite réentraînées par le courant avec une vitesse V_n appréciable, V_z changeant de signe.

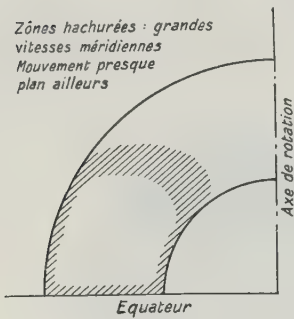


Fig. 15.

La figure 15 représente la trace des particules dont nous venons de parler sur un plan méridien qui y serait attaché. Quant à celles des zones de latitude plus élevée, elles restent animées d'un mouvement pratiquement plan.

L'on voit, en consultant la courbe $M(\omega)$ [fig. 11], que l'on se trouve sur le début du deuxième segment. Du point de vue cinématique, le passage du premier au second régime s'est manifesté par l'apparition, à partir de 8 tr/mn, de composantes de vitesses, V_r et V_z , nulles à 8 tr/mn et croissant sans discontinuité.

Si ω croît, le couple correspond toujours au deuxième segment; les enroulements autour de la sphère ont un « pas » qui reste sensiblement constant en chaque endroit déterminé du liquide et un V_r qui les rapproche légèrement de la sphère intérieure. Sur l'équateur, le fluide est centrifugé, puis remonte vers les pôles toujours très près de la sphère extérieure, en englobant une zone de fluide mort (voir fig. 15). Par ailleurs, l'équateur forme dans tous les cas un plan de symétrie pour les lignes de courant.

Pour des vitesses ω supérieures encore, l'aspect reste exactement le même (voir fig. 14 prise à 27 tr/mn).

c. Vitesses supérieures à 28 tours-minute :

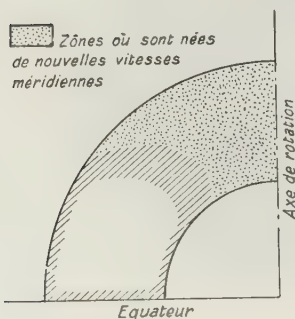


Fig. 16.

Si la vitesse ω croît encore, on observe une très brusque augmentation des vitesses V_r et V_z des particules qui se trouvent au-dessus de la zone de fluide mort considéré plus haut et assez éloignées de la sphère intérieure, le reste du phénomène restant qualitativement le même dans les autres zones (voir fig. 16).

Les figures 17 et 18, prises respectivement à 31 et 36 tr/mn, illustrent parfaitement ce phénomène.

Si l'on examine conjointement la courbe $M(\omega)$ [fig. 11], on s'aperçoit que ces vitesses appartiennent à un troisième segment.

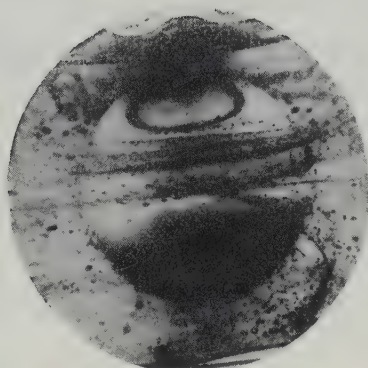
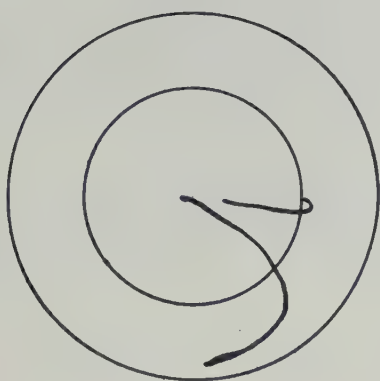


Fig. 17.

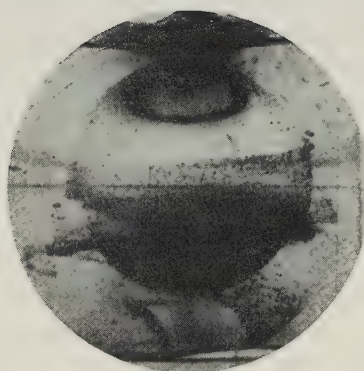
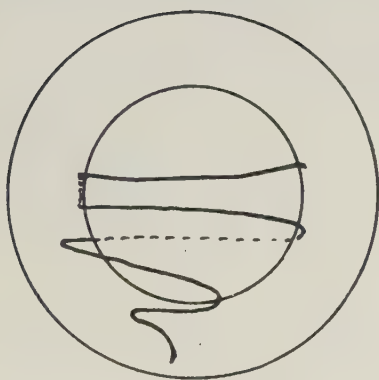


Fig. 18.

D. Conclusion.

Si l'on dresse le bilan de ces observations tant visuelles que photographiques, nous trouvons :

1° *Que pour des vitesses telles que le moment mesuré soit égal au moment calculé, le mouvement est plan.* Ces vitesses, dans le cas considéré, s'étendent jusqu'à environ 8 tr/mn, soit un nombre de Reynolds de 20 approximativement;

2° *Ensuite apparaissent des vitesses méridiennes* qui, d'après les considérations de pas sensiblement constant des anneaux, sont en première approximation linéaires en fonction de ω . A l'équateur, le fluide est chassé vers l'extérieur dans une zone de latitude très resserrée, quelques degrés. *Les vitesses méridiennes, dans le passage de cette zone aux zones adjacentes, présentent de toute évidence une discontinuité.*

Des vitesses méridiennes importantes règnent dans l'espace hachuré (voir fig. 13); dans les autres parties le mouvement est plan, à vitesse faible. Conjointement, le couple $M(\omega)$ se trouve sur le deuxième segment de la courbe (11);

3 *Pour les vitesses supérieures* qui correspondent au troisième segment $M(\omega)$, *des vitesses méridiennes apparaissent dans la zone pointillée* (fig. 16). L'aspect général du phénomène reste, par ailleurs, le même; le pas des anneaux semble cependant avoir cru par rapport à celui du deuxième régime, et ceci, d'autant plus que l'on considère des régions plus voisines des pôles.

Malgré le caractère quelque peu qualitatif de telles observations, nous allons dans le chapitre suivant, montrer comment elles corroborent parfaitement les résultats déjà acquis que nous tenterons alors d'interpréter.

CHAPITRE VII

INTERPRÉTATION GÉNÉRALE DES RÉSULTATS

Nous allons maintenant tirer la conclusion des expériences faites et des résultats cités dans la première partie de ce travail.

En premier lieu, il apparaît qu'on ne peut mettre en doute l'existence d'un coefficient de viscosité défini, ni la validité de toutes les hypothèses classiques dans certains cas. *Validité des équations de STOKES, continuité des vitesses aux limites, mouvement plan*, toutes ces suppositions se trouvent vérifiées, tant par l'observation visuelle directe que par la mesure expérimentale de moments concordants avec ceux déduits du calcul, donc des hypothèses ci-dessus citées. Mais ces conclusions ne sont valables que dans un domaine de vitesses et de viscosité considérablement plus restreint que celui auquel on avait cru pouvoir les appliquer après des expériences sur les seuls cylindres de révolution. Nous nous dispenserons donc de toute autre explication pour cette partie des résultats puisqu'elle est entièrement élucidée par les hypothèses classiques.

Quant aux résultats anormaux, beaucoup plus complexes, ils semblent entraîner des contradictions. Nous avons, en effet, montré dans ce qui précède, que si le mouvement plan était possible mathématiquement dans le cas des cylindres, qu'on introduise ou non les termes d'inertie, il était en toute rigueur impossible pour les autres corps avec les équations complètes. *Les termes d'inertie doivent donc déterminer pour ces corps des mouvements gauches* qui ont, en effet été observés, sans discussion possible, pour tout le domaine anormal; toutefois, leur forme n'a pu être déterminée de façon précise.

De plus, l'examen des expériences prouve que, par discontinuités successives, plusieurs mouvements, dont le mouvement plan, sont possibles, et que les passages des uns aux autres sont discontinus, puisque la courbe, couple, vitesse angulaire, présente des points anguleux. Mais dans l'intervalle de ceux-ci, *les forces de viscosité restent linéaires en η et en ω , critérium absolu de la validité des équations de STOKES*, toute addition directe des termes d'inertie devant entraîner des forces proportionnelles au carré de la vitesse.

Comment concilier ces deux faits contradictoires : d'une part, les mouvements gauches qui impliquent l'intervention des termes d'inertie, d'autre part, la validité des équations de STOKES qui décèle qu'ils n'interviennent pas.

Peut-être peut-on lever le paradoxe en imaginant que les termes d'inertie déclenchent les mouvements gauches mais n'interviennent pas, ou tout au moins de façon absolument négligeable, pour ajouter des forces proportionnelles au carré de la vitesse à celles dues aux

termes linéaires des équations de STOKES. En ce cas, les segments de la courbe $M(\omega)$ resteraient bien linéaires en η et en ω . Encore faudrait-il que les mouvements gauches et la validité des équations de STOKES fussent compatibles entre eux et avec l'hypothèse de la continuité des vitesses. Or, ils ne le sont pas, comme va le montrer un calcul dont nous emprunterons des éléments à la thèse de H. DE BEAUMONT (17).

A. Incompatibilité des équations de Stokes et du mouvement gauche avec la continuité des vitesses.

Reprenons l'expression générale du couple, établie page 9, et tirons-en l'expression de la puissance dissipée au sein du liquide. Celle-ci est égale à :

$$M(\omega_2 - \omega_1) = 2\pi\eta(\omega_2 - \omega_1) \int_{ABCDEF} r^3 \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} dr - \frac{\partial \omega}{\partial r} dz \right) \quad (1)$$

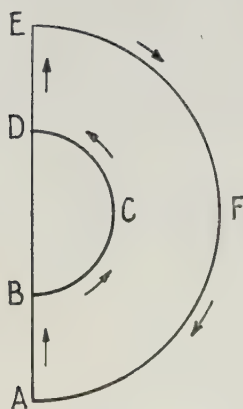


Fig. 19.

M , étant le couple appliqué, ω_1 , ω_2 , les vitesses imposées aux couches limites. La quantité sous le signe $\int$ est à intégrer le long du contour ABCDEF (fig. 19) et c'est une différentielle totale exacte; en effet, si l'on écrit que l'expression considérée est une différentielle totale exacte, on obtient la condition $\Delta_{r,z} \omega + \frac{3}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} = 0$. Or, si on se reporte au système (7) de la page 13, on voit que :

- 1° On passe aux équations de STOKES en y faisant $\rho = 0$;
- 2° L'établissement des deux premières équations de (7) n'a pas utilisé l'hypothèse du mouvement plan, soit $V_z = 0$. On peut en tirer ici :

$$\frac{\partial^2 V_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_n}{\partial r} - \frac{V_n}{r^2} + \frac{\partial^2 V_n}{\partial z^2} = 0$$

soit, en posant $V_n = r\omega$:

$$\Delta_{r,z} \omega + \frac{3}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} = 0$$

On peut donc écrire :

$$M(\omega_2 - \omega_1) = 2\pi\eta \int_{ABCDEF} r^3 \omega \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} dr - \frac{\partial \omega}{\partial r} dz \right). \quad (2)$$

En effet, si l'on intègre (2) sur le contour ABCDEF, les intégrales sur AB et sur DE sont nulles puisque $r = 0$ le long de AB et de DE. D'autre part, $\omega = \omega_2$ et $\omega = \omega_1$ sur les

contours BCD et EFA; ces deux contours étant parcourus selon des sens opposés, on peut écrire :

$$\int_{\text{BCD}} r^3 \omega \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} dr - \frac{\partial \omega}{\partial r} dz \right) + \int_{\text{EFA}} r^3 \omega \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} dr - \frac{\partial \omega}{\partial r} dz \right) = (\omega_2 - \omega_1) \int_{\text{ABCDEF}} r^3 \omega \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} dr - \frac{\partial \omega}{\partial r} dz \right)$$

et, par conséquent, l'équation (2) est équivalente à l'équation (1). En transformant (2) par la formule de GREEN, il vient :

$$M(\omega_2 - \omega_1) = 2\pi\eta \iint \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(r^3 \omega \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r^3 \omega \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) \right] dr dz \quad (3)$$

ou encore :

$$M(\omega_2 - \omega_1) = 2\pi\eta \iint \left[r^3 \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2 + r^3 \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \right)^2 \right] dr dz + 2\pi\eta \iint \left[\omega \frac{\partial}{\partial z} \left(r^3 \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) + \omega \frac{\partial}{\partial r} \left(r^3 \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) \right] dr dz. \quad (4)$$

Or, le second terme du deuxième membre est égal à :

$$2\pi\eta \iint \left[\omega \frac{\partial}{\partial z} \left(r^3 \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) + \omega \frac{\partial}{\partial r} \left(r^3 \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) \right] dr dz = 2\pi\eta \iint \omega r^3 \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} \right] dr dz$$

qui est nul dans l'hypothèse des équations de STOKES, comme nous l'avons déjà fait remarquer plus haut. D'où :

$$M(\omega_2 - \omega_1) = 2\pi\eta \iint \left[r^3 \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2 + r^3 \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \right)^2 \right] dr dz. \quad (5)$$

On peut également atteindre l'expression de la puissance dissipée par la fonctionnelle de LORD RAYLEIGH :

$$R = \iint \vec{V} \cdot \vec{T} ds \quad (6)$$

$\vec{V}$ étant la vitesse, $\vec{T}$ la force, ds l'élément de surface considéré.

Le calcul de cette intégrale est classique (voir, par exemple, BOUASSE, *loc. cit.*, p. 179) :

$$R = \eta \iiint \left[2 \Sigma \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \Sigma \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau. \quad (7)$$

En coordonnées cylindriques, les $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, etc., en fonction de V_r , V_z , $V_n = r\omega$, sont donnés page 12 de ce travail. En remplaçant dans (7), il vient :

$$R = 2\pi\eta \iint \left[r^2 \left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2 \right] + 2 \left(\frac{\partial V_z}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{V_r}{r} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial V_z}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{\partial V_r}{\partial z} \right)^2 \right] r dr dz. \quad (8)$$

Telle est l'expression de la fonctionnelle de Lord RAYLEIGH en coordonnées cylindriques, ceci sans autre hypothèse que celle du mouvement giratoire indépendant de θ .

En égalant les deux expressions de l'énergie dissipée (5) et (8), il vient donc :

$$2\pi\eta\iint\left[r^3\left(\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)^2+r^3\left(\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)^2\right]drdz=2\pi\eta\iint\left[r^3\left(\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)^2+r^3\left(\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)^2\right]drdz \\ +2\pi\eta\iint\left[2\left(\frac{\partial V_r}{\partial r}\right)^2+2\left(\frac{V_r}{r}\right)^2+2\left(\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial V_z}{\partial z}+\frac{\partial V_r}{\partial z}\right)^2\right]rdrdz \quad (9)$$

soit :

$$2\pi\eta\iint\left[2\left(\frac{\partial V_r}{\partial r}\right)^2+2\left(\frac{V_r}{r}\right)^2+2\left(\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial V_z}{\partial z}+\frac{\partial V_r}{\partial z}\right)^2\right]rdrdz=0$$

soit encore :

$$\frac{\partial V_r}{\partial r}=\frac{V_r}{r}=\frac{\partial V_z}{\partial z}=\frac{\partial V_z}{\partial z}=0 \quad (10)$$

et enfin :

$$V_r=0. \quad (10)$$

D'après les équations (10), il reste donc comme seul mouvement possible, en dehors du mouvement plan, une translation axiale en bloc (puisque $V_r=0$), ce qui est évidemment à rejeter. *Le mouvement plan est donc entraîné par les équations de STOKES dans le cas du mouvement giratoire à continuité de vitesses.*

B. Discontinuité des vitesses.

Examinons les hypothèses faites pour arriver à la conclusion du paragraphe précédent : il n'y en a qu'une : la continuité des vitesses aux limites et au sein du liquide. C'est donc sa validité qu'il faut mettre en cause.

Remarquons que cette notion n'est pas naturelle *a priori*. Les premiers expérimentateurs l'établirent dans certains cas particuliers : tubes, cylindres coaxiaux. Citons les expériences de WARBURG (18), établissant pour le mercure la continuité sur la paroi de verre. Au contraire, la viscosité d'un gaz mesurée dans un capillaire peut être entachée d'une erreur de 5 p. 100 due aux glissements à la paroi si la pression est faible ; WARBURG montre en effet, que tout se passe comme si le diamètre utile du tube était : $D + \frac{2a}{p}$, D diamètre réel, p la pression.

Pour les corps de révolution autres que des cylindres, la continuité des vitesses n'a pas, à notre connaissance, été constatée. Au contraire, ces derniers temps, des expériences de BARILLON (19), DUHEM (20), semblent l'infirmier. Une note théorique de H. DE BEAUMONT (21) montre que la poussée d'un fluide visqueux sur un obstacle doit être nulle à moins d'admettre

l'existence de sillages analogues à ceux qui se produisent pour les gaz, ce qui conduit, du reste, cet auteur à modifier la théorie du coin d'huile proposée par SOMMERFELD. Des résultats identiques ont été obtenus par BLOCK (22) et par H. CABANNES (23).

Admettons donc du point de vue mathématique, l'existence du mouvement gauche et des équations de STOKES et nous verrons quelles conclusions en tirer quant à la continuité des vitesses.

Appelons ψ la fonction de courant méridienne définie de telle sorte que :

$$rV_r = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad rV_z = -\frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (11)$$

Si l'on reprend les équations du système (7), page 13, dans l'hypothèse du mouvement gauche et des équations de STOKES, les coefficients de ρ sont nuls et, comme nous venons de le faire remarquer, les deux premières équations de ce système restent valables pour le mouvement gauche; quant aux deux dernières, elles deviennent :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial z} - \eta \left[\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right] = \rho g \\ \frac{\partial (rV_r)}{\partial r} + \frac{\partial (rV_z)}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

D'où le système, en posant $V_n = r\omega$:

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial r} - \eta \left[\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{V_r}{r^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} \right] = 0 \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} - \eta \left[\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right] = \rho g \\ \frac{\partial (rV_r)}{\partial r} + \frac{\partial (rV_z)}{\partial z} = 0. \end{cases} \quad (12)$$

En introduisant la fonction de courant ψ définie ci-dessus, il vient :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial r} - \eta \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - \frac{1}{r^3} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right] = 0 \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right] = \rho g \end{cases}$$

ou encore :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right] = 0 \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\partial^3 \omega}{\partial r^2} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right] = \rho g \end{array} \right. \quad (13)$$

En désignant avec H. DE BEAUMONT par $E(\psi)$ la quantité :

$$E(\psi) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

les équations (13) s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial z} E(\psi) = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial r} E(\psi) = \rho g \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\partial^3 \omega}{\partial r^2} = 0. \end{array} \right. \quad (14)$$

En éliminant successivement p et $E(\psi)$ entre les deux premières équations, il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} E[E(\psi)] = 0 \\ \Delta p = \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} = 0. \end{array} \right. \quad (15)$$

C'est une équation du quatrième ordre qui détermine ψ . On a alors des vitesses méridiennes V_r et V_z qui se surajoutent aux vitesses V_n . Les particules décrivent des surfaces toriques à cercle directeur.

Nous avons donc affaire à des mouvements gauches et nous avons vu que dans ce cas, il nous faut admettre la discontinuité des vitesses méridiennes au moins. Si on l'admet, tous les phénomènes observés se relient et se comprennent, puisqu'alors équations de STOKES et mouvements gauches sont compatibles.

C. Examen des résultats expérimentaux.

Examinons de plus près, à la lumière de ce qui précède, les résultats expérimentaux :

À partir d'une certaine vitesse critique apparaissent des vitesses méridiennes; celles-ci, ainsi que nous l'a montré la considération du pas des anneaux, croissent linéairement en

fonction de ω , au moins dans certains domaines. Si nous supposons que l'addition des vitesses méridiennes modifie peu les vitesses angulaires, on voit que la circulation due à V_r et V_z va faire naître une nouvelle dissipation d'énergie. Comme cette dernière est égale à $M(\omega_2 - \omega_1)$, M croît en fonction de ω , après l'apparition de ces vitesses méridiennes, plus vite que lors du mouvement plan.

Or, nous avons constaté déjà que *les forces dues aux vitesses méridiennes croissent linéairement en fonction de la vitesse et de la viscosité*. On ne pourrait affirmer que le champ des vitesses méridiennes est indépendant de la viscosité que si les points anguleux, séparant deux régimes du même ordre, se situaient l'un au-dessous de l'autre. Or la position des vitesses ω_c est trop imprécise pour qu'on puisse infirmer ou affirmer cette conclusion, tout au moins pour une faible variation de η .

Quoi qu'il en soit, on voit comment on peut concevoir le mouvement du fluide en conformité avec les faits expérimentaux et les théories de STOKES, si l'on admet des discontinuités de vitesses. Quant à la vérification expérimentale des discontinuités, il est à peu près impossible de la rendre décisive. En effet, on pourra toujours dire qu'une éventuelle discontinuité observée n'est qu'une très rapide variation continue du vecteur vitesse. Autrement dit, il est impossible de conclure d'une discontinuité observée à une discontinuité mathématique : elle la fera simplement présumer.

Si l'on se reporte au chapitre VI de la visualisation, nous avons signalé l'existence de très grandes vitesses radiales au voisinage de l'équateur, entourant une zone de liquide immobile. Il est incontestable qu'il y a là un très fort gradient de vitesse, ou une discontinuité. D'après les raisonnements mathématiques que nous avons développés plus haut, il semble que l'on doive conclure à l'existence de ce dernier cas.

CONCLUSION DE LA PREMIÈRE PARTIE

En résumé, il ressort de ce travail les points principaux suivants :

1° *Les hypothèses classiques rendent parfaitement compte des phénomènes*, quels que soient les corps et quelles que soient les viscosités si on prend soin d'avoir un rapport $\frac{\omega}{\eta}$ suffisamment petit ;

2° Les anomalies se produisent pour les autres corps de révolution que les cylindres suivant le processus suivant :

Les termes d'inertie, sans agir directement par les forces qu'ils créeraient, déclenchent des mouvements gauches à trois dimensions réelles.

Mais, résultat inattendu *a priori*, *les équations linéarisées restent capables de rendre compte des phénomènes*, tant qu'on reste sur un régime de vitesses déterminé ; ces régimes se succèdent sans transition, les uns aux autres, à certaines vitesses critiques.

Or cette constatation expérimentale de la validité des équations de Stokes, validité décelée par la linéarité des forces de viscosité en fonction de la vitesse et de l'existence simultanée des mouvements gauches est une contradiction mathématique en l'hypothèse de la continuité des vitesses dans le fluide et sur les contours ;

3° L'expérience directe par visualisation ne permet ni d'infirmar ni d'affirmer une discontinuité des vitesses, mais elle donne des présomptions en faveur de cette hypothèse.

En supposant l'existence d'une telle discontinuité, on peut proposer de nombreuses explications des anomalies. Citons, par exemple, la théorie de PLATEAU (24), montrant l'existence d'une « couche séparatrice » à viscosité beaucoup plus élevée que celle du liquide interne, ou celle plus moderne de couche limite laminaire.

Ainsi, c'est donc, en dernier ressort, la discontinuité des vitesses méridiennes qu'il faut rendre responsable des anomalies constatées.

DEUXIÈME PARTIE

COIN D'HUILE ÉTUDE DES PRESSIONS

INTRODUCTION

Toutes les mesures précédemment décrites, faites à l'aide de solides tournants, nécessitent la mesure du couple qui s'exerce sur l'un des deux corps. Lorsque l'espace entre ceux-ci devient très petit devant les rayons de courbure il se développe au sein de la lame fluide des pressions importantes. C'est ce qui se passe par exemple entre un axe et un palier lubrifié par l'interposition d'une très faible épaisseur d'huile. La théorie de ce phénomène a été faite en 1886 par REYNOLDS (7) et perfectionnée depuis par SOMMERFELD (25), MICHELL (26), CHARRON (27), PARIGY et THIRY (28), etc.

Cette théorie dite « du coin d'huile » montre que la poussée sur l'arbre est proportionnelle au coefficient de viscosité de l'huile utilisée. Nous pouvons donc déduire des mesures de pression (équivalentes aux mesures de la poussée) les coefficients de viscosité et former à partir d'un coin d'huile un viscosimètre absolu d'un nouveau genre.

Les travaux expérimentaux antérieurs ont été surtout destinés à éprouver la théorie. CHARRON a mesuré les pressions maxima développées dans une lame d'huile comprise entre deux plans voisins et peu inclinés l'un sur l'autre, l'un des plans étant en translation uniforme parallèlement à lui-même (27).

BEAUCHAMP-TOWER ont examiné les poussées auxquelles est soumis un arbre réel dans un palier industriel du type courant à coussinet (29).

Nous avons imaginé un montage expérimental différent. La lame d'huile sur laquelle nous expérimenterons est comprise entre deux cylindres excentrés, comme la lame lubrifiante dans un coussinet; mais ces deux cylindres sont maintenus fixes l'un par rapport à l'autre quant aux translations possibles. Dans ce but, des axes et des coussinets auxiliaires aussi bien ajustés que possible maintiennent le cylindre intérieur qui n'est donc pas porté par la lame d'huile à expérimenter. Cette disposition permet :

1° De simplifier le travail expérimental en donnant à la lame une fois pour toutes des dimensions connues;

2° De vérifier si les hypothèses faites sont encore valables quand on augmente l'épaisseur de la lame nettement au delà de la valeur habituellement admise dans les paliers; en effet celles-ci sont d'autant plus sujettes à caution que l'épaisseur est plus grande;

3° De réaliser par ailleurs le but que nous nous sommes proposés, à savoir, en plus de la vérification des formules de REYNOLDS, la création d'un viscosimètre absolu d'emploi pratique.

Nous développerons donc successivement dans ce qui va suivre :

1° Un rappel de la théorie de REYNOLDS et une critique des hypothèses qu'elle implique;

2° Le principe et la description de l'appareil imaginé et une extension de la théorie de REYNOLDS au cas particulier de ce dernier;

3° Enfin les séries de mesures effectuées et les conclusions qu'on peut en tirer quant à la théorie du coin d'huile et à l'utilisation de l'appareil comme viscosimètre absolu et continu.

A. Rappel de la théorie de Reynolds et critique des hypothèses qu'elle implique.

a. Rappel de la théorie de Reynolds.

Considérons une lame d'huile dans un palier; l'espace qu'elle occupe forme un coin dans

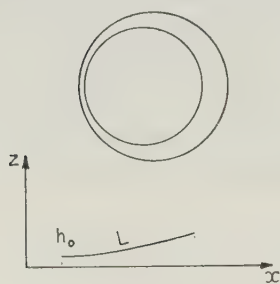


Fig. 20.

lequel se développent des pressions lors de la rotation de l'arbre (fig. 20). Étant donné les grands rayons de courbure du palier devant la faible épaisseur de la lame, REYNOLDS suppose que la répartition des vitesses et des pressions est identique à ce qu'elle serait dans un film limité entre une paroi plane P et une paroi L dont la côte au-dessus de la première varierait en fonction de l'abscisse comme l'épaisseur du film courbe en fonction de l'abscisse curviligne.

Étudions donc ce cas. Supposons le plan P matérialisé par un rectangle de grandes dimensions pourvu de petits rebords de hauteur supérieure à la hauteur maxima du coin et

qui retiennent l'huile étalée sur lui.

La largeur de l'ensemble perpendiculairement au plan de la figure est supposée très grande. S'il n'en est pas ainsi, L sera muni de joues parallèles au plan de figure pour empêcher tout écoulement latéral de l'huile. Nous aurons alors un phénomène plan.

Supposons alors à P une vitesse de translation $-u_0$ dirigée suivant Ox. Si u et w sont les vitesses suivant les axes et p la pression, on a les relations :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \eta \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \eta \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (1)$$

et l'équation de continuité :

$$\text{div. } \vec{V} = 0. \quad (2)$$

Les hypothèses faites par REYNOLDS et ses successeurs sont les suivantes :

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ est négligeable devant $\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$,

p est fonction de x seul.

Avec ces hypothèses les équations de STOKES se réduisent à :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \eta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (3)$$

qui, intégrée par rapport à z , donnera :

$$u = \frac{z^3}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} + Az + B. \quad (4)$$

En admettant la continuité des vitesses aux limites, on peut écrire :

$u = -u_0$ pour $z = h$

$u = 0$ pour $z = 0$.

D'où la détermination immédiate des deux constantes qui, portées dans l'expression de u , donnent :

$$u = \left[\frac{z^3}{2\eta} - \frac{hz}{\eta} \right] \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{u_0 z}{h}. \quad (5)$$

Par ailleurs, la pression p , étant égale à la pression atmosphérique aux deux extrémités, passe certainement par un maximum pour une certaine valeur h_1 correspondant à l'abscisse x_1 . Donc pour $x = x_1$, $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$, p étant une fonction continue de x . D'après (5), u est alors linéaire en z et on a :

$$u = -\frac{u_0 z}{h_1}. \quad (6)$$

Le débit est donc égal à $-\frac{u_0 h_1}{2} dy$, puisque la vitesse moyenne pour $x = x_1$ entre $z = 0$ et $z = h$, est $-\frac{u_0}{2}$, u étant une fonction linéaire de z .

L'équation de continuité exprime que le fluide est incompressible ; nous pouvons la remplacer en écrivant que le débit en un point x quelconque est égal au débit en x_1 :

$$Q = \int_0^h u dz = \int_0^h \left[\frac{z^3}{2\eta} - \frac{hz}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{u_0 z}{h} \right] dz = -\frac{u_0 h}{2} \quad (7)$$

D'où l'on tire, après avoir effectué les intégrations, la relation fondamentale :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -6 \eta u_0 \frac{h - h_1}{h^3}. \quad (8)$$

A partir de cette équation (8), nous pouvons calculer la pression en tous points, si l'on connaît la fonction $h = f(x)$ et si l'expression de $\frac{\delta p}{\delta x}$ ainsi obtenue peut s'intégrer. Une nouvelle intégration $\int_0^x p \, dx$ donnera la poussée totale exercée sur le tronçon de surface latérale compris entre 0 et x et de hauteur l'unité.

b. *Critique des hypothèses de Reynolds.*

Reprenons les équations (1) et (2). Dérivons la première en x , la seconde en z et ajoutons membre à membre :

$$\Delta p = \eta \left[\frac{\delta^2}{\delta x^2} \left(\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta z} \right) + \frac{\delta^2}{\delta z^2} \left(\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta z} \right) \right].$$

Or d'après l'équation de continuité (2) :

$$\text{div. } \vec{V} = \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta z} = 0;$$

Donc : $\Delta p = 0$

La pression est une fonction harmonique. Si, d'après l'hypothèse faite, la pression est fonction de x seul, on a alors :

$$\Delta p = \frac{\delta^2 p}{\delta x^2} = 0. \quad (9)$$

$\frac{\delta p}{\delta x}$ devrait donc être constant, conclusion en désaccord avec l'équation (8). Cette contradiction vient des hypothèses faites, à savoir que les variations de p par rapport à z ont été considérées comme négligeables.

Par ailleurs, un autre auteur, H. DE BEAUMONT (21) a montré que la poussée exercée sur un arbre, telle qu'on peut la déduire des travaux de STOKES, est nulle. C'est ce qu'il ressort d'une note (21) où l'auteur envisage un obstacle soumis à l'action d'un courant indéfini de vitesse u_0 et pour lequel la poussée serait nulle. Ce courant pourrait être créé par une rotation en bloc du liquide contenu dans un récipient cylindrique de grand diamètre. Physiquement on conçoit mal, lorsque l'on réduit le rayon de ce cylindre, la naissance d'une poussée, si elle n'existe pas *a priori*.

c. *Applications antérieures.*

Néanmoins, si on applique la théorie de REYNOLDS, compte tenu de la simplification citée $\frac{\delta^2 p}{\delta z^2} = 0$, quelle concordance peut-on attendre avec les résultats expérimentaux?

Les principaux travaux récents sur la question sont de F. CHARRON (27). Cet auteur étudie le cas particulièrement simple, du point de vue mathématique, du coin d'huile plan.

Le plan inférieur horizontal, projeté en CD sur le plan de la figure 21, est matérialisé par une plaque rectangulaire très longue. Le plan CD peut glisser sur lui-même selon xy avec

la vitesse u_0 . Une autre plaque plane, projetée en AB sur le plan de la figure 21, matérialise

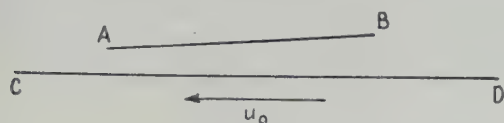


Fig. 21.

l'autre face du coin et est maintenue immobile dans la couche d'huile. La pression en A et B est supposée égale à la pression atmosphérique. Un tube manométrique est fiché entre A et B, à l'endroit où le calcul fait prévoir un maximum de pression.

Ce dispositif expérimental paraît assez délicat à monter et à manier. Toute la mesure doit s'insérer dans la durée de déplacement du plan CD, durée qui est évidemment limitée, ceci d'autant plus que la vitesse u_0 est plus grande.

Les résultats obtenus par cet auteur restent en bon accord avec la théorie, à quelques pour cent près.

Nous avons pensé appliquer l'équation (8) au cas d'une lame comprise entre deux cylindres excentrés, ce qui constitue une possibilité de mesure de la viscosité à partir des pressions développées.

Ce dispositif a entre autre l'avantage de supprimer les discontinuités causées par les extrémités du plan fixe en A et B, lieux où il est difficile d'éviter des tourbillons dont les hypothèses ne peuvent tenir aucun compte.

En outre, un viscosimètre appuyé sur ce principe de deux cylindres, peut offrir, comme nous le verrons, l'avantage de donner des mesures de η immédiates et continues sans aucune manipulation.

B. Principe de l'appareil et extension de la théorie de Reynolds.

I. PRINCIPE ET DESCRIPTION DE L'APPAREIL

1° *Principe.* — Nous avons signalé dans un rappel de la théorie, le cas simple du coin d'huile limité par deux plans; l'épaisseur h étant fonction linéaire de l'abscisse, l'intégration des formules de REYNOLDS (8) en est facilitée. Nous opérerons ici sur une lame d'huile comprise entre deux cylindres excentrés. La lame a donc

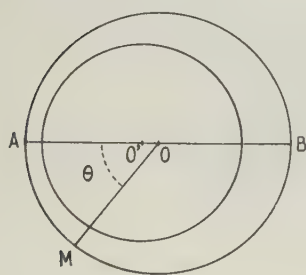


Fig. 22.

la forme ci-contre. Pour répondre exactement à la théorie, sa hauteur, perpendiculairement au plan de la figure 22, devrait être infinie; pratiquement si on prend une hauteur de part et d'autre du plan où s'effectuent les mesures, égale ou supérieure au diamètre du cylindre extérieur et si on empêche l'écoulement latéral de l'huile à l'aide de joues, on réalise une très bonne approximation. Ces joues portent les

coussinets sur lesquels s'appuie l'axe du cylindre intérieur; ce dernier reste ainsi fixe quelles que soient les poussées exercées sur lui. L'ajustement est fait avec un jeu inférieur au centième de millimètre. Les déplacements qui en résultent pour le cylindre intérieur modifient les dimensions de la lame de façon négligeable, par rapport à son épaisseur moyenne qui est de 1,63 mm.

Cette disposition présente les avantages suivants :

a. Elle permet d'éliminer au cours de l'expérience les mesures de la lame expérimentale, si l'on consent à cette incertitude de l'ordre du centième. Une mesure précise et définitive des rayons des deux cylindres et de leur excentrement, fixe une fois pour toutes ses dimensions ;

b. Un autre point délicat dont on doit tenir compte dans les paliers réels et qui oblige à des corrections douteuses est la variation du coefficient de viscosité au cours de l'expérience sous l'influence de trois facteurs :

— α . La viscosité de l'huile croît avec la pression. Les variations de η peuvent être d'un ordre de grandeur voisin de 100 p. 100. Comme les pressions varient selon le point considéré, tout se passe comme si une huile absolument hétérogène lubrifiait le palier ;

— β . L'énergie perdue par frottement dans le coussinet se retrouve sous forme de calories dissipées dans un volume d'huile extrêmement faible. Il est courant qu'une huile envoyée dans un palier à 20° C en ressorte à 50° C. Ce facteur est encore plus gênant que le premier. Avec l'huile spindle que nous avons utilisée et qui convient très bien à ce genre de graissage la viscosité passe de 0,396 à 0,180 poises lorsque la température varie dans de telles limites. Là encore, tout se passe comme si l'huile était hétérogène, et de plus la connaissance des températures en chaque point est pratiquement impossible ;

— γ . Enfin certains auteurs, MARCELIN, PIGNOT, AUBERT (1) et (2), par exemple, ont mis en évidence l'orientation des molécules d'un film d'huile dans lequel on relève des gradients de vitesse élevés. Cette orientation facilite le glissement et introduit une diminution du coefficient de viscosité qui nous est inconnue.

Dans le cas de l'appareil ci-dessous décrit où une lame d'huile plus épaisse est utilisée, les difficultés que nous venons de signaler s'atténuent. Les pressions à mesurer ne dépassent pas 100 g au cm². D'autre part, les calories créées par frottement se répartissent sur un volume beaucoup plus grand d'huile ; une circulation d'huile dans l'appareil favorise encore l'homogénéisation des températures. Enfin l'orientation des molécules est peu intense, le gradient de vitesse étant plus faible que dans un palier.

2° *Description de l'appareil.* — Les figures 23 et 24 en donnent un aspect général.

On y aperçoit le cylindre extérieur et les joues qui le limitent, les extrémités de l'arbre du cylindre intérieur et ce cylindre lui-même vu en coupe. Des prises de pression sont réparties sur le pourtour du cylindre extérieur dans un plan de section droite situé à égale distance des extrémités. Deux de ces prises coïncident respectivement avec le point A, où l'épaisseur de la lame est minima et avec le point B, où elle est maxima. Les autres se répartissent à égale distance angulaire, tous les 45°. Nous avons été amenés au cours des expériences à créer d'autres prises de pression, en particulier, à l'endroit où le calcul nous a fait prévoir un maximum de pression.

Ces prises sont constituées par des tubes de cuivre rouge encastrés dans le cylindre externe dont plusieurs s'aperçoivent sur la figure 23. Ils communiquent avec des trous percés dans la paroi interne et qui, vu leur diamètre de 1 mm, ne troublent pas sensiblement l'écoulement.

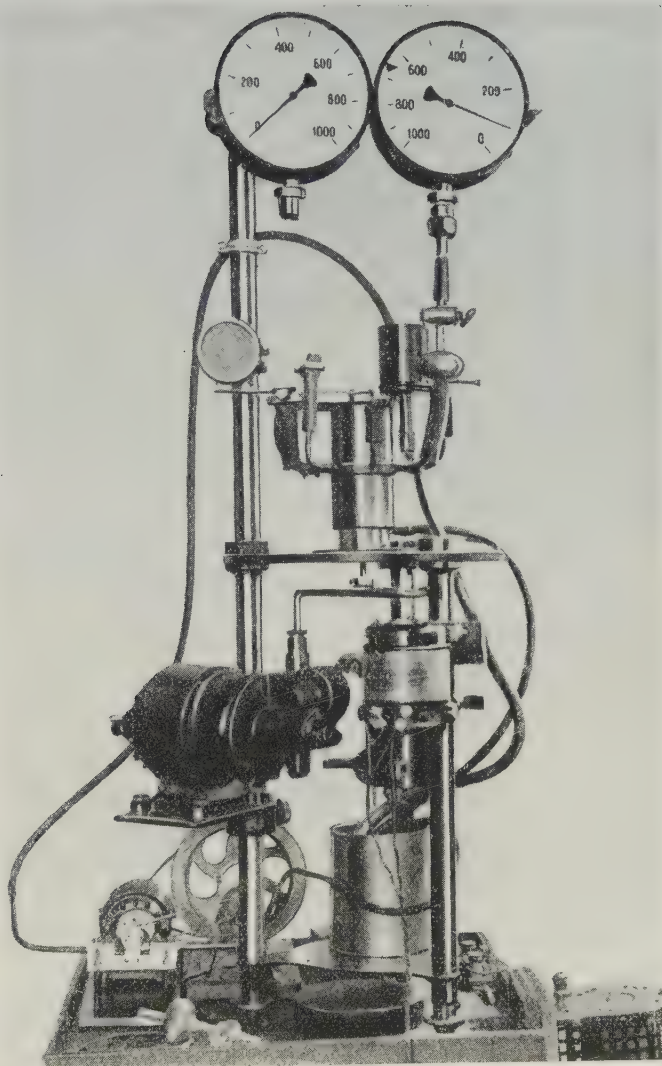


Fig. 23.

Établissement d'une circulation d'huile en circuit fermé à l'intérieur de l'appareil. — Sur la joue supérieure est fixé un réservoir T qui communique avec l'enceinte par un tube soudé de 7 mm de diamètre suivi d'un trou de 2 mm qui débouche tangentielllement à la paroi interne du cylindre extérieur, à l'aplomb de B, point où la lame a son épaisseur maxima (voir fig. 24). Le réservoir T dispose également d'un trop-plein C.

A l'aplomb de B, mais à la partie inférieure, se trouve l'orifice d'évacuation de l'huile,

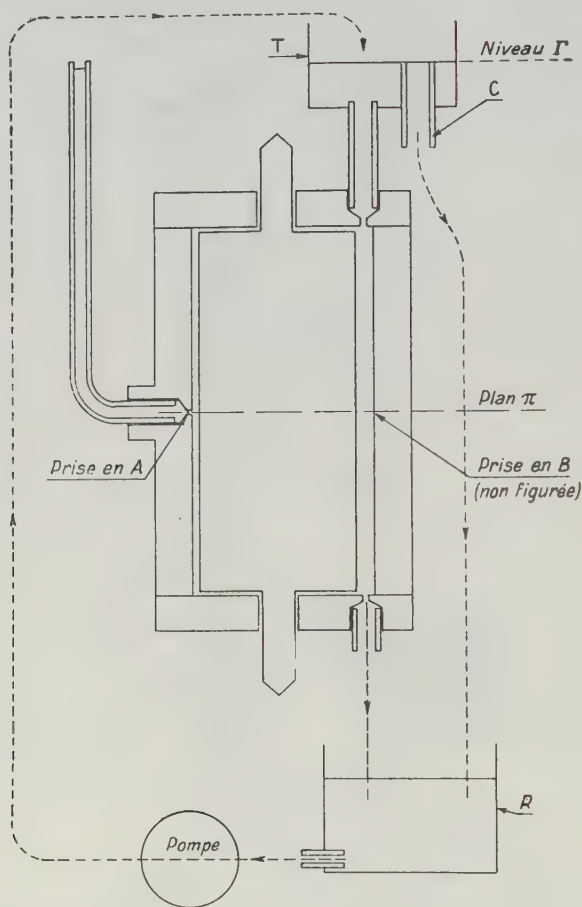


Fig. 24.

orifice qui a 1 mm de diamètre et qui communique par une canalisation souple avec la réserve d'huile située en R. C'est dans cette dernière que puise une pompe à engrenage, à débit variable, pour envoyer l'huile dans le réservoir supérieur T dont nous avons déjà parlé; ce réservoir étant, comme nous l'avons vu, pourvu d'un trop-plein à grande section C, l'huile y reste à un niveau constant Γ , si on règle convenablement le débit de la pompe.

Le débit dans l'appareil est limité par l'orifice de 1 mm de diamètre à une valeur inférieure à celle dont est capable l'orifice d'arrivée de 2 mm de diamètre. Nous sommes donc sûrs que l'appareil est plein d'huile si l'on maintient constant le niveau dans le réservoir T grâce au trop-plein C et à un débit excessif de la pompe.

Marche de l'expérience. — La pression statique qui règne au départ sur le plan π des prises de pression est la somme de la pression atmosphérique et de la pression due à la hauteur d'huile comprise entre le plan π et le plan du trop-plein Γ . Toutes les prises de pression, étant ouvertes à ce moment à leurs parties supérieures, se remplissent d'huile au niveau Γ . Un manomètre de mesure peut alors être branché sur la prise de pression à expérimenter, les autres prises étant obturées.

La pression qui règne sur le plan π est la pression atmosphérique augmentée de la hauteur d'huile $\Gamma - \pi$. Nous conviendrons de prendre cette pression comme pression de référence, $P_0 = 0$.

En B, où arrive du réservoir T à niveau constant Γ , l'huile de circulation, la pression restera constante pendant toute la durée de l'expérience et égale à $P_0 = 0$.

En A, la prise est constamment reliée au réservoir T à niveau constant; il y régnera comme en B la pression P_0 . Nous verrons ultérieurement la raison de ce montage.

Si l'on impose alors à l'aide du moteur M, une rotation Ω au cylindre intérieur, les petits orifices des prises situés dans le plan π sont soumis aux pressions de l'huile; aucun débit ne passe par les orifices des prises obturées, puisqu'elles sont entièrement remplies d'huile incompressible. Il n'en est pas de même des prises qui sont équipées pour les mesures. En effet, il reste de l'air dans le tube manométrique; l'huile monte donc au-dessus du plan Γ d'une hauteur l . La pression réelle est alors la somme de la pression P lue et de la pression due à cette hauteur l . Cette dernière est dans notre appareil de 1 cm pour une pression lue de 100 g cm², et nous la négligerons.

Caractéristiques numériques de l'appareil. — Les grandeurs caractéristiques de l'appareil sont les suivantes :

Rayon du cylindre intérieur r	2,500 cm
Rayon du cylindre extérieur R	2,656 cm
Distance des axes des deux cylindres a	0,112 cm
Hauteur du cylindre intérieur.....	10,000 cm
Hauteur du cylindre extérieur.....	10,005 cm
Épaisseur de la lame à l'endroit le plus étroit.....	0,044 cm = λ
Épaisseur de la lame à l'endroit le plus large.....	0,268 cm = μ

Ces mesures, à part les deux dernières qui sont calculées à partir des autres, ont été faites à l'aide d'un lecteur optique pour l'examen des photographies de spectre qui nous donne avec certitude le centième de millimètre.

Les prises de pression sont faites, l'une à 31° à partir de A, une autre à 54° de A, une troisième à 59° de A (nous en verrons la raison plus loin), les autres tous les 45° sur la demi-circonférence entre A et B à partir de A.

II. EXTENSION DE LA THÉORIE DE REYNOLDS À L'APPAREIL PROPOSÉ

Nous considérerons :

$h = NM$, comme étant le segment porté par un rayon variable du grand cercle et compris entre les deux cercles (fig. 25);

$x = \widehat{AM}$, comme étant l'abscisse curviligne comptée sur le grand cercle à partir d'une origine que nous fixerons en A, endroit où la distance entre les deux cercles est minima.

Nous conviendrons de confondre x avec la longueur de la lame d'huile. Elle sera comptée positivement de A à B dans le sens opposé de la rotation.

Dans ces conditions, cherchons à exprimer h en fonction de x . La considération du triangle $OO'N$ nous conduit à :

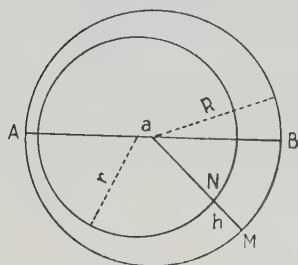


Fig. 25.

$$h = R - a \cos \Theta - r \sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2} \sin^2 \Theta},$$

avec :

$$\Theta = \widehat{AOM} = \frac{x}{R} \quad \text{et} \quad a = OO'.$$

En remarquant que a est très faible devant r , on peut négliger les termes à partir du second ordre dans le développement en série de :

$$\sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2} \sin^2 \Theta} = 1 - \frac{1}{2} \frac{a^2}{r^2} \sin^2 \Theta + \dots$$

et par conséquent :

$$\begin{aligned} h &= R - r - a \cos \Theta \\ h &= R - r - a \cos \frac{x}{R}. \end{aligned}$$

C'est du reste la valeur approchée de h adoptée par SOMMERFELD dans ses calculs sur les paliers.

D'après la théorie de REYNOLDS étendue au cas de notre appareil, nous devons avoir :

$$-\frac{p}{6\eta u_0} + C^{te} = + \int_0^x \frac{h - h_1}{h^3} dx = \int_0^x \frac{dx}{h^2} - \int_0^x \frac{h_1}{h^3} dx \quad (10)$$

où p est la pression au point d'abscisse x .

D'où :

$$\frac{p}{6\eta u_0} + C^{te} = - \int_0^x \frac{dx}{\left(R - r - a \cos \frac{x}{R}\right)^2} + h_1 \int_0^x \frac{dx}{\left(R - r - a \cos \frac{x}{R}\right)^3},$$

Soit encore :

$$\frac{p}{6\eta u_0} + C^{te} = h_1 J' - J. \quad (11)$$

avec :

$$J = \int_0^x \frac{dx}{\left(R - r - a \cos \frac{x}{R}\right)^2}$$

et :

$$J' = \int_0^x \frac{dx}{\left(R - r - a \cos \frac{x}{R}\right)^3}.$$

L'intégration nous conduit aux résultats suivants :

$$J = 2R \left[\frac{R-r}{\mu^{3/2} \lambda^{3/2}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} \operatorname{tg} \frac{x}{2R} \right) + \frac{a}{\mu^2 \lambda} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2R}}{\frac{\lambda}{\mu} + \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2R} \right)^2} \right] \quad (12)$$

$$J' = R \left[\frac{2(R-r)^2 + a^2}{\mu^{5/2} \lambda^{5/2}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} \operatorname{tg} \frac{x}{2R} \right) + \frac{a[4(R-r) - a]}{\mu^3 \lambda^2} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2R}}{\frac{\lambda}{\mu} + \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2R} \right)^2} + \frac{2a^2}{\mu^4 \lambda} \times \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2R}}{\left[\frac{\lambda}{\mu} + \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2R} \right)^2 \right]^2} \right]. \quad (13)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mu &= R - r + a \\ \lambda &= R - r - a. \end{aligned}$$

Les équations (11), (12) et (13), nous permettent donc d'avoir p lorsque nous aurons déterminé les deux constantes d'intégration, C d'une part, et h_1 d'autre part.

Pour cela, nous avons imposé au système deux conditions que nous rappelons :

1° La pression en A est la pression atmosphérique, augmentée d'une hauteur d'huile constante; soit P_0 cette pression que nous avons convenu de prendre comme pression de référence c'est-à-dire que, pour $x = 0$, nous aurons $p = 0$.

Pour $x = 0$, les équations (12) et (13) montrent que :

$$J = 0 \text{ et } J' = 0.$$

En conséquence, puisque $p = 0$, la constante d'intégration est nulle. D'où :

$$\frac{p}{6\eta u_0} = h_1 J' - J; \quad (14)$$

2° La pression en B est également la pression $P_0 = 0$. Donc, pour $x = \pi R$, nous aurons encore $P = P_0 = 0$ et en conséquence $h_1 J' - J = 0$, soit $h_1 = \frac{J}{J'}$.

Les intégrales J et J' prennent, pour $x = \pi R$, les valeurs simples suivantes :

$$J = \frac{2R (R-r) \pi}{\mu^{3/2} \lambda^{3/2}} \frac{\pi}{2}$$

$$J' = R \frac{2 (R-r)^2 + a^2}{\mu^{3/2} \lambda^{5/2}} \frac{\pi}{2}$$

D'où :

$$h_1 = \frac{2 (R-r) \mu \lambda}{2 (R-r)^2 + a^2} = \frac{2 (R-r) (R-r-a) (R-r+a)}{2 (R-r)^2 + a^2}. \quad (15)$$

Les expressions (12), (13) et (15) nous permettant de calculer respectivement J , J' et h_1 en fonction de x et des constantes de l'appareil, R , r et a , la pression p peut être calculée en tout point d'abscisse curviligne x d'après l'expression (14).

APPLICATION NUMÉRIQUE

Rappelons les constantes de l'appareil :

$$\left\{ \begin{array}{l} R = 2,656 \\ r = 2,500 \\ a = 0,112 \end{array} \right\} \text{ en cm}$$

ce qui nous donne :

$$\mu = R - r + a = 0,268 \text{ cm}$$

$$\lambda = R - r - a = 0,044 \text{ cm.}$$

Pour h_1 , J , J' et p , nous obtenons les valeurs :

D'après (15) :

$$h_1 = 0,0601 \text{ cm.} \quad (15 \text{ bis})$$

D'après (12) :

$$J = 5,312 \left[121,827 \text{ arc } tg \left(2,468 \text{ } tg \frac{x}{2R} \right) + 35,440 \frac{tg \frac{x}{2R}}{0,16417 + \left(tg \frac{x}{2R} \right)^2} \right]. \quad (12 \text{ bis})$$

D'après (13) :

$$J' = 2,656 \left[4054,000 \text{ arc } tg \left(2,468 \text{ } tg \frac{x}{2R} \right) + 1538,790 \frac{tg \frac{x}{2R}}{0,16417 + \left(tg \frac{x}{2R} \right)^2} \right. \\ \left. + 110,529 \frac{tg \frac{x}{2R}}{\left[0,16417 + \left(tg \frac{x}{2R} \right)^2 \right]^2} \right]. \quad (13 \text{ bis})$$

D'où la valeur numérique en unités C. G. S. de p en fonction de x d'après (14).

Nous allons calculer p en plusieurs points précis, ce qui nous permettra par la suite la vérification expérimentale de nos calculs.

1° Pression maxima :

Plaçons-nous à l'endroit où la pression est maxima c'est-à-dire à l'endroit où l'on a $dp = 0$, soit $h = h_1 = 0,0601$ ce qui, d'après l'expression donnant h ($h = R - r - a \cos \frac{x}{R}$), où l'on fait $h = h_1 = 0,0601$, donne pour $\frac{x}{2R}$ la valeur :

$$\frac{x}{2R} = 0,27140 \text{ radians soit } \frac{x}{R} = 31^\circ 6' = \Theta.$$

Remplaçons $\frac{x}{2R}$ par sa valeur dans les équations (12 bis) et (13 bis), il vient :

$$J = 606,27; J' = 12\,586,60; h_1 J' = 756,45 \text{ en C. G. S.}$$

c'est-à-dire que nous aurons d'après (14) :

$$\frac{p}{6\eta u_0} = h_1 J' - J = 150,18 \text{ en C. G. S.}$$

2° Courants de retour :

a. *Détermination de la zone des courants de retour.* — La théorie montre également que la vitesse u en certains points de la lame peut changer de sens; il y a alors des courants de retour qui participent à un mouvement en sens contraire de l'écoulement général. Nous appellerons « zones de courants de retour » les zones définies par leurs abscisses x telles que la vitesse soit positive en un point quelconque de l'épaisseur comprise entre 0 et h_i au point x_i considéré.

Reprenons l'expression (5) de la vitesse donnée page 51 :

$$u = \left[\frac{z^2 - hz}{2\eta} \right] \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{u_0 z}{h} \quad (5)$$

et en utilisant l'équation (8) :

$$u = -3u_0 \left[\frac{z^2 - hz}{h^3} \right] \frac{h - h_1}{h} - \frac{u_0 z}{h}$$

Sur une droite $x_i = C^{te}$ choisie arbitrairement, les vitesses u se répartissent suivant une loi parabolique en fonction de z . Pour que des vitesses positives prennent naissance en un point quelconque de l'épaisseur de la lame, pour un x_i considéré, il faut que le sommet

de la parabole de répartition des vitesses soit dans la lame réelle (fig. 26). Calculons donc le cas limite où $\frac{\delta u}{\delta z} = 0$ quand $z = 0$. On a :

$$\frac{\delta u}{\delta z} = -3u_0 \frac{[2z - h][h - h_1]}{h^3} - \frac{u_0}{h} = 0$$

soit, pour $z = 0$, la relation simple :

$$h = \frac{3}{2} h_1.$$

Calculons l'abscisse correspondante :

$$\Theta = \frac{x}{R} = 54^\circ.$$

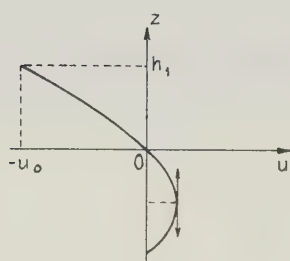


Figure A

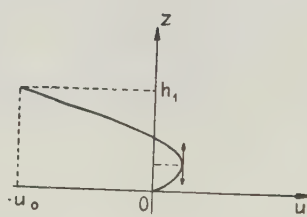


Figure B

Fig. 26.

Donc, dans la partie de la lame 0 à 54°, il n'y a pas de courants de retour; toutes les vitesses sont négatives. Dans la partie 54° à 180°, des courants de retour existent dans une portion de la lame adjacente au cylindre extérieur fixe, portion dont l'épaisseur croît dans le même sens que celle de la lame. C'est cette partie où existent simultanément vitesses négatives et positives que nous appellerons « zone des courants de retour »;

b. *Calcul de la pression à 54° et à 59° de A.*

$$1^\circ \Theta = 54^\circ \frac{x}{2R} = \frac{\Theta}{2} = 27^\circ.$$

Soit en calculant les valeurs de J et de J', données par les équations (12 bis) et (13 bis) :

$$J = 808,35; \quad J' = 15\,428,89; \quad h_1 J' = 927,27 \text{ en C. G. S.}$$

Donc :

$$\frac{p}{6\eta u_0} = h_1 J' - J = 118,92 \text{ en C. G. S.}$$

$$2^\circ \Theta = 59^\circ \frac{x}{2R} = \frac{\Theta}{2} = 29^\circ 30'.$$

D'où d'après les équations (12 bis) et (13 bis) :

$$J = 833,94; J' = 15\,701,10; h_1 J' = 943,63 \text{ en C. G. S.}$$

Soit :

$$\frac{p}{6\eta u_0} = h_1 J' - J = 109,69 \text{ en C. G. S.}$$

3° *Prises quelconques* :

a. $\Theta = 45^\circ$.

$$\frac{x}{2R} = \frac{\Theta}{2} = 22^\circ 30'$$

Et d'après les équations (12 bis) et (13 bis) :

$$J = 747,64; J' = 14\,696,16; h_1 J' = 883,24 \text{ en C. G. S.}$$

D'où :

$$\frac{p}{6\eta u_0} = h_1 J' - J = 135,60 \text{ en C. G. S.}$$

b. $\Theta = 90^\circ$.

$$\frac{x}{2R} = \frac{\Theta}{2} = 45^\circ$$

Les équations (12 bis) et (13 bis) donnent :

$$J = 929,09; J' = 16\,495,27; h_1 J' = 991,37 \text{ en C. G. S.}$$

Et par conséquent :

$$\frac{p}{6\eta u_0} = h_1 J' - J = 62,26 \text{ en C. G. S.}$$

c. $\Theta = 135^\circ$.

$$\frac{x}{2R} = \frac{\Theta}{2} = 67^\circ 30'.$$

Et en calculant les valeurs données par les équations (12 bis) et (13 bis) :

$$J = 984,74; J' = 16\,788,79; h_1 J' = 1\,009,01 \text{ en G. C. S.}$$

D'où :

$$\frac{p}{6\eta u_0} = h_1 J' - J = 24,27 \text{ en C. G. S.}$$

4° Prises symétriques :

Les valeurs de p sur les points situés symétriquement sur l'autre demi-circonférence AB ont des valeurs égales et des signes contraires, comme on le constate aussitôt en changeant x en $-x$ dans les formules (12) et (13).

C. Les mesures expérimentales.

L'appareil tel qu'il a été décrit est rempli d'huile. Pour éviter, si besoin est, un échauffement sensible lors de la rotation du cylindre intérieur, la circulation peut être réglée de façon à établir un débit voisin de 50 cm³ à la minute, soit deux fois le volume de l'espace compris entre les deux cylindres.

Les courbes seront établies de la manière suivante : la vitesse étant ω_n , nous attendons que le manomètre ou le vacuomètre se stabilise à une pression que nous notons p_n , la circulation dans l'appareil étant interrompue. Puis nous arrêtons la rotation du cylindre et rétablissons la circulation en notant alors la température moyenne de sortie de l'huile que la dissipation du couple moteur échauffe. Lorsque la température de sortie redevient égale à la température d'entrée, nous recommençons le cycle des opérations pour une autre vitesse.

Pour une huile et une prise de pression données, nous construisons ainsi par points la courbe $P(\omega)$, dans l'ordre des vitesses croissantes ou décroissantes, ce que nous avons reconnu être sans importance. Comme nous ne pouvons, sauf en mettant tout l'appareil dans un thermostat, maintenir constante la température de l'ensemble de l'huile et que η peut de ce fait varier de quelques p. 100 durant le relevé de ces points, nous ramenons les pressions p_1 lues à la température $t + \varepsilon$ aux pressions qui auraient été lues p_r si l'expérience avait eu lieu à la température constante t , suivant le principe de correction exposé page 18.

Nous avons effectué toutes ces séries d'opérations pour les prises de pression de $\pm 31^\circ$, $\pm 45^\circ$, $\pm 54^\circ$, $\pm 59^\circ$, $\pm 90^\circ$, $\pm 135^\circ$. Cet ensemble de mesures renfermant les résultats obtenus pour une huile déterminée à une température constante t (ou à une température suffisamment voisine de t pour autoriser les corrections de température) est groupé sur une même figure. Les droites $P(\omega)$, telles qu'elles ont été calculées par les formules données pages 61 à 63, sont également portées sur ces figures pour chaque prise (le η qui figure dans ces calculs étant évidemment celui relevé sur une courbe $\eta(t)$ établie à l'aide des viscosimètres à tubes), sauf lorsqu'elles coïncident avec les droites expérimentales.

Les résultats sont résumés graphiquement dans les figures 27, 28, 29, 30. Nous pouvons remarquer les faits suivants :

1° Les pressions relevées sur deux prises de pression diamétralement opposées sont égales en valeur absolue dans la zone exempte de courants de retour ;

2° Les mesures effectuées sur les prises de pression à $\pm 31^\circ$ et à $\pm 45^\circ$ montrent un accord parfait entre les résultats théoriques et expérimentaux ;

3° Les mesures faites à $\pm 90^\circ$ sont égales en valeur absolue, mais quelles que soient les huiles employées, sont nettement différentes de ce que laisse prévoir la théorie ; il fau-

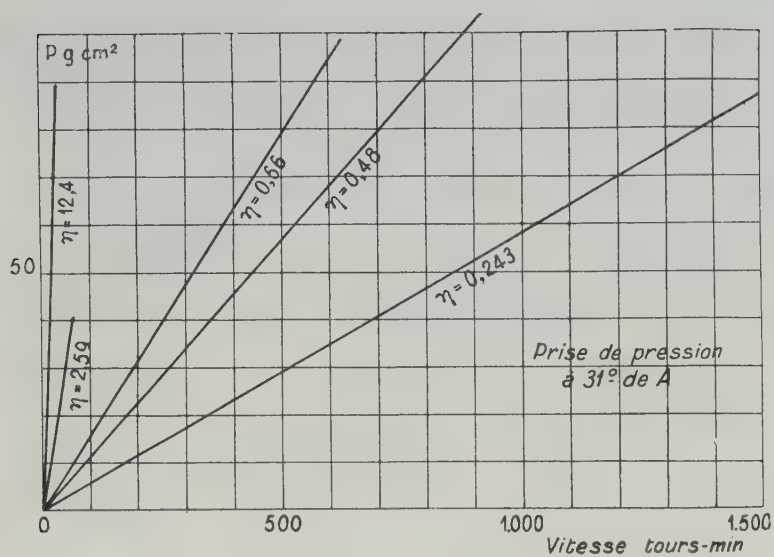


Fig. 27.

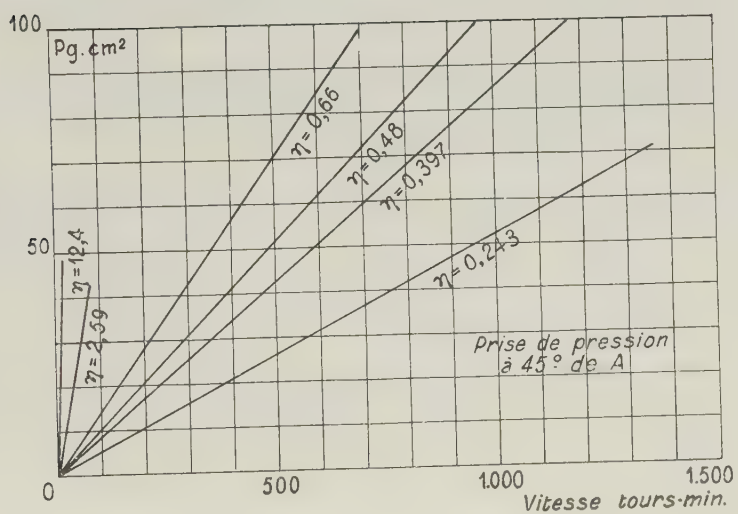


Fig. 28.

drat multiplier les pressions expérimentales par un coefficient voisin de 1,4 pour trouver les pressions théoriques;

4° Les quelques mesures citées à $+ 135^\circ$ se font avec une grande instabilité, malgré les précautions prises. Nous pouvons seulement remarquer que les pressions mesurées présentent encore un écart plus grand d'avec les pressions calculées que dans le cas des prises à $\pm 90^\circ$.

L'instabilité de la pression rend toute mesure impossible à $- 135^\circ$;

5° Quant aux mesures à 54° et à 59° , elles ont été faites successivement. En effet les tuyaux des deux prises de pression auraient empiétés l'un sur l'autre. Les mesures à 54° ayant été effectuées, la prise a été rebouchée pour permettre d'en percer une nouvelle à 59° .

Nous n'avons pas cru devoir surcharger le texte avec les tableaux d'expérience pour ces prises; les résultats sont en effet très simples :

— accord parfait entre l'expérience et la théorie dans le domaine de viscosité et de vitesse exploré pour la prise à $+ 54^\circ$ de même que pour les prises 31° et 45° malgré une certaine instabilité de la pression;

— pour la prise à $+ 59^\circ$, les pressions expérimentales sont d'environ 3 p. 100 inférieures aux pressions calculées, ceci dans le domaine vitesse-viscosité étudié.

CONCLUSION DE LA DEUXIÈME PARTIE

Si l'étude de la question du coin d'huile appliquée à un viscosimètre est loin d'être épuisée par les quelques résultats que nous avons signalés, il semble cependant intéressant de faire le point de ce qui est acquis jusqu'à présent.

En première approximation, *il existe deux parties dans la lame d'huile* : la zone où les hypothèses classiques de REYNOLDS cadrent parfaitement avec les faits et nous pouvons nous y adresser en toute sécurité pour bâtir un appareil utilisable de mesure de viscosité; l'autre où les pressions mesurées sont en fait inférieures. Il est du reste intéressant de remarquer la curieuse similitude entre ces résultats et ceux de la première partie : un régime ou une zone pour lesquels les hypothèses classiques rendent parfaitement compte des phénomènes; un autre où l'on constate des anomalies. En la circonstance et avec les caractéristiques géométriques données, c'est à 54° de A qu'elles commencent à prendre naissance. En effet, si à 54° les pressions calculées et expérimentales coïncident parfaitement, à 59° les écarts sont voisins de 3 p. 100.

Il serait fort improbable d'admettre que juste à cet endroit l'épaisseur de la lame commence à devenir excessive pour justifier les hypothèses précitées. Et cela d'autant plus qu'un manquement soudain aux hypothèses fausserait la concordance résultats-théorie, non seulement dans la partie de la lame sujette aux courants de retour, mais dans l'autre. En effet, et c'est là une remarque très importante, le calcul de la page 58 montre que le comportement de toute la lame intervient dans la détermination de la pression en chaque point; or la pres-

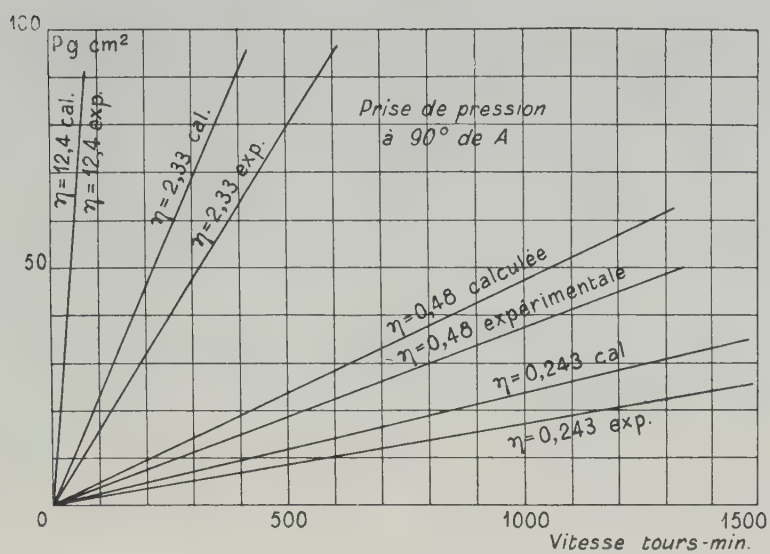


Fig. 29.

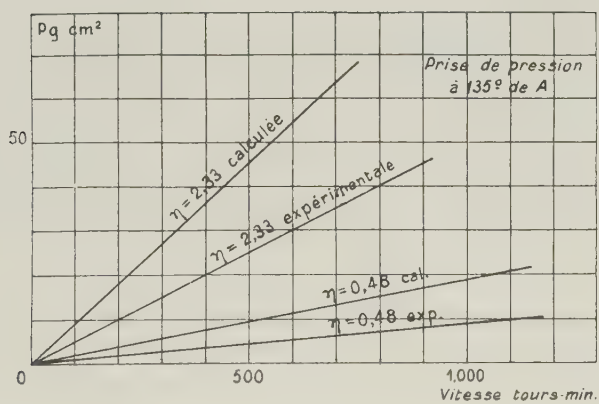


Fig. 30.

sion dans la première partie de la lame et la position du maximum, en particulier, ne sont pas affectées par les anomalies qui se présentent dans la seconde.

Il paraît donc beaucoup plus logique d'admettre, surtout à la lumière des résultats de la première partie de ce travail, que l'hypothèse de la distribution des vitesses perpendiculaires au plan méridien est conforme à la réalité, mais qu'il s'y surajoute localement, dans la zone des courants de retour, des vitesses méridiennes dont il faudrait tenir compte pour la mesure locale de la pression. Mais ce ne sont là que des hypothèses que nous nous efforçons à l'heure actuelle d'étayer par des expériences que nous indiquerons un peu plus loin.

Quoi qu'il en soit, si, dans un appareil à cylindres excentrés, l'on ménage des prises de pression de part et d'autre de l'endroit où l'épaisseur de la lame est minima, et où il n'existe pas de courants de retour, les pressions que l'on relève sont en accord parfait avec celles que l'on peut prévoir à la suite d'un calcul basé sur les hypothèses classiques de REYNOLDS sur un coin d'huile mince et étendues à une épaisseur de l'ordre du millimètre. Ceci nous a permis de constituer un viscosimètre d'un nouveau genre qui offre l'intérêt de donner la valeur de la viscosité de l'huile d'un appareil quelconque (moteur, par exemple) de façon immédiate et continue, sans mesure et sans opérateur. Par ailleurs, l'huile peut être prise dans les conditions mêmes où elle se trouve dans l'appareil d'utilisation.

En dehors de ces résultats d'aspect technique, il est intéressant de noter comment les hypothèses de REYNOLDS se trouvent vérifiées dans la partie de la lame exempte de courants de retour. Pourquoi ne le sont-elles pas dans toute la lame? C'est encore une question à élucider. En tous cas, il semble difficile d'admettre que l'épaisseur devienne subitement trop grande à partir de 54° pour que les hypothèses cessent d'être valables; ce serait là une bien curieuse coïncidence.

Toutefois, pour éclaircir la question, il est souhaitable de réaliser deux montages annexes :

L'un où les variations d'épaisseur de la lame seront moindres, de telle sorte que des courants de retour disparaîtront. Pour cela, toutes les pièces constitutives de l'appareil décrit seront utilisées, sauf les joues qui servent d'appui à l'axe du cylindre intérieur.

Par ailleurs, on pourrait imaginer que les cylindres n'étant pas indéfinis dans le sens de l'axe comme l'exige la théorie, les écoulements éventuels parallèles à l'axe se localisent dans la partie de la lame la plus épaisse pour former un anneau à axe perpendiculaire à l'axe de rotation, reproduisant ici les mouvements gauches observés à propos de la rotation relative de deux sphères. Pour étudier cette éventualité, des prises de pression multiples seront réparties sur l'appareil, non pas dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation, mais sur la génératrice correspondant au maximum d'épaisseur de la lame.

La visualisation des lignes de courant suivant la technique exposée dans le chapitre VI permettra sans doute de résoudre la question.

Tels sont sommairement exposés les résultats acquis et la voie dans laquelle nous comptons étudier la question du coin d'huile, qui, bien qu'ancienne, offre un domaine très riche à la recherche expérimentale et théorique.

Tout ce travail a été exécuté dans les locaux du Laboratoire de Recherches physiques de la Sorbonne, et j'exprime à son directeur, M. le Doyen honoraire J. CABANNES, membre de l'Institut, l'expression de ma respectueuse gratitude. L'intérêt qu'il m'a porté et les conseils qu'il a toujours bien voulu me donner ont été pour moi décisifs.

Qu'il me soit permis également d'exprimer ma reconnaissance à tous ceux qui m'ont aidé, en particulier à M. H. DE BEAUMONT dont les conseils quant à la résolution de certaines difficultés d'ordre théorique m'ont été très précieux ; à MM. les professeurs H. VILLAT, membre de l'Institut, R. THIRY, qui ont assumé avec M. M. AUBERT la direction de mes recherches et m'ont aidé à dégager la signification théorique des expériences ; à M. P. VERNOTTE, ingénieur en chef de l'Aéronautique qui a bien voulu accueillir ce mémoire dans la collection qu'il dirige.

J'adresse enfin hommage à la mémoire du regretté professeur J. VILLEY, qui fut l'un des instigateurs de cette thèse et dont la disparition nous a si douloureusement surpris.

BIBLIOGRAPHIE

I. Table des auteurs cités

1. M. MARCELIN. — *Les trois régimes du frottement lubrifié*. Paris 1942.
2. M. AUBERT et A. PIGNOT. — *Annales de l'Office national des combustibles liquides*. Paris 1937, pages 1173 et 1939, page 7.
3. BOUASSE. — *Hydrodynamique générale*. Delagrave, Paris 1928, page 256.
4. COUETTE. — *Thèse de doctorat*. Paris 1890.
5. A. GUILLET. — *C. R. Acad. Sciences*. Paris, 200, 1935, p. 1522.
6. A. FOCH et BARRIOL. — *C. R. Acad. Sciences*. Paris, 193, 1931, p. 835.
7. O'REYNOLDS. — *Papers on mechanical and physical subjects*, t. 2, p. 228.
8. SCHEDOFF. — *Congrès de Physique*, 1900, p. 478.
9. MOLIN. — *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 20, 1920.
10. LEWIS. — *Phil. Mag.*, 3, 1927, p. 429.
11. MAXWELL. — *Phil. Trans.*, 154. Bakerian lecture, 1866.
12. A. GUILLET. — *C. R. Acad. Sciences*. Paris, 200, 1935, p. 442.
13. M. LUNTZ et P. SCHWARTZ. — *Publ. Scient. et Techn.*, Ministère Air. Paris, 1935, n° 71
14. AHLBORN. — *Beitrag zur Physik der freien Atmosphäre*, XI, Heft 4, page 117.
15. F. CHARRON. — *Publ. Scient. et Techn.*, Ministère Air. Paris 1947, n° 208.
16. L. SACKMANN. — *Publ. Scient. et Techn.*, Ministère Air. Paris 1936, n° 92.
17. H. DE BEAUMONT. — *Thèse de doctorat*. Paris 1948.
18. WARBURG. — *Pogg. Ann.*, 140, 1870, page 367.
19. BARILLON. — *Recherches et Inventions*. Paris 1928, n° 161.
Recherches et Inventions. Paris 1930, n° 185.
C. R. Acad. Sciences. Paris, 189, 1929, page 734.
20. DUHEM. — *C. R. Acad. Sciences*. Paris, 159, 1914, page 592 et page 638.
21. H. DE BEAUMONT. — *C. R. Acad. Sciences*. Paris, 222, 1946, page 44;
et *C. R. Acad. Sciences*. Paris, 223, 1946, page 535.
22. R. BLOCK. — *Jour. of Applied Physics*, 2, 1940, p. 635.
23. H. CABANNES. — *C. R. Acad. Sciences*. Paris 224, 1947, p. 713.
24. PLATEAU. — *Bulletin Acad. Belgique*, 2^e série, 48, 1879, p. 106.
25. SOMMERFELD. — *Zur hydrodynamischen Theorie der Schmiermittelreibung*.
26. MICHELL. — *Viscosité et Lubrification*. Traduction, Paris, Gauthier-Villars, 1927.
27. CHARRON. — *Publ. Scient. et Techn.*, Ministère Air. Paris 1946, n° 198.
28. PARIGY et THIRY. — *Rapport du G. R. A.* Paris 1946, n° 22.
29. BEAUCHAMP-TOWER. — *Proc. Inst. Mech. Eng.*, 1883 et 1884.

II. Quelques ouvrages généraux sur la viscosité des liquides

- H. BOUASSE. — *Hydrodynamique générale*. Delagrave, Paris 1928.
- L. BRILLOUIN. — *Leçons sur la viscosité*. Gauthier-Villars, Paris 1907.
- E. DARMOIS. — *L'état liquide de la matière*. Albin Michel, Paris 1943.
- A. FOCH. — *Introduction à la mécanique des fluides*. Armand Colin, Paris 1941.
- H. FORTIER. — *Cours de la Faculté des Sciences de Paris* (chaire de Mécanique des fluides).
- E. HATSCHKE. — *La viscosité des liquides*. Traduction, Dunod, Paris 1932.
- H. VILLAT. — *Leçons sur la viscosité*. Gauthier-Villars, Paris.
- P. WOOG. — *Contribution à l'étude du graissage*. Delagrave, Paris 1926.

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

INFLUENCE
DE LA STRUCTURE DES HYDROCARBURES
SUR LEUR VISCOSITÉ

Vu et approuvé :

Paris, le 10 mars 1950.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

A. CHATELET.

Vu et permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

Jean SARRAILH.



IMPRIMERIE



IMPRIMERIE